MATEMÁTICA

Prof. Anselmo

LISTA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. Calcule quantos múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2,3,4,6 e 9 (Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 3).

Solução. Precisamos selecionar quatro algarismos cuja soma seja múltiplo de 3:
- soma 21: {2,4,6,9}: 4 x 3 x 2 x 1 = 24 números distintos.
- soma 18: {2,3,4,9}: 4 x 3 x 2 x 1 = 24 números distintos.
- soma 15: {2,3,4,6): 4 x 3 x 2 x 1 = 24 números distintos.

Logo, há no total 24 + 24 + 24 = 72 números possíveis.

2. Seis times de futebol, entre os quais estão A e B, vão disputar um campeonato. Suponha que na classificação final não existam empates. Um indivíduo fez duas apostas sobre a classificação final. Na primeira, apostou que A não seria campeão; na segunda, apostou que B não seria o último colocado. Em quantas das 720 classificações possíveis esse indivíduo ganha as duas apostas?

Solução. Para que ganhe as duas apostas, as duas situações devem ocorrer. Uma forma de pensar é calcular as situações ocorrendo e subtrair do total. Isto é trabalhamos com o complementar:

i) A é campeão: fixamos A na 1º colocação: A _ _ _ _ _ Há 5! = 120 possibilidades para o restante. Repare que B pode em alguma delas ocupar a última posição.

ii) B é o último: fixamos B na 6ª colocação: _ _ _ _ _ B Há também 5! = 120 possibilidades. Repare que A pode ocupar a 1º posição em algumas das possibilidades.

iii) A campeão e B o último: A _ _ _ _ B Há 4! = 24 possibilidades. Essa situação é a interseção dos dois casos anteriores.
Logo, o número de possibilidades de ganha na aposta é: 720 – (120 + 120 – 24) = 720 – 216 = 504 possibilidades.

3. Dos 33 alunos da M37, seis serão escolhidos para participar de um debate em uma mesa circular. Antônio, Felipe, Camila e Milena só irão se forem juntos; de tal forma que Camila e Milena vão sentar lado a lado e o Antônio e o Felipe nunca irão sentar lado a lado à mesa. De quantas maneiras distintas podem se sentar?

Solução. O número de permutações de n em uma roda é dado por (n – 1)! chamada PERMUTAÇÃO CIRCULAR (PC). Podemos formar a mesa das seguintes formas:

i) Seis alunos em que não constem os quatro alunos citados. Logo escolhemos 6 de 29 e permutamos circularmente esses alunos: $C_{29}^{6} \times (6-1)! = C_{29}^{6} \times 5! = C_{29}^{6} \times PC(6)$.

ii) Seis alunos com os quatro alunos citados. Logo, serão escolhidos mais dois dentre os 29 restantes. Há C_{29}^{2} **formas de fazê-lo. Uma vez escolhidos temos as exigências.**
- Como Camila e Milena estão sempre juntas, funcionam como uma pessoa só, podendo trocar entre si de posição. Logo há $(5-1)! \times 2! = PC(5) \times 2$ **casos.**

- Antônio e Felipe não podem ficar juntos. Então o número de casos será o número total menos o número em que ficam juntos. Além das duas amigas, temos os dois juntos.

Logo seriam $(4-1)! \times 2! \, x 2! = PC(4) \times 4$ **(os fatoriais são Camila-Milena e troca; Antonio-Felipe e troca). O número de casos onde os meninos não estão juntos é:** $PC(5) \times 2 - PC(4) \times 4$.

Juntando todos os casos, temos: $\boxed{C_{29}^{6} \times 5! + C_{29}^{2} \times (PC(5) \times 2 - PC(4) \times 4)}$.

4. Usando-se os algarismos 1,3,5,7 e 9, existem x números de 4 algarismos de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais. Determine o valor de **x**.

Solução. O oposto de ter pelo menos dois números iguais é ter todos diferentes. Logo, o número de casos pedidos será: Nº total – Nº (4 algarismos distintos).
i) Total de números de quatro algarismos: 5 x 5 x 5 x 5 = 625 números.

ii) Total de números de quatro algarismos distintos: 5 x 4 x 3 x 2 = 120 números.

Logo há 625 – 120 = 505 números de quatro algarismos com pelo menos dois algarismos iguais.

5. Entre os 20 professores de uma escola, devem ser escolhidos três para os cargos de diretor, vice-diretor e orientador pedagógico. De quantas maneiras a escolha pode ser feita?

Solução. Escolhendo um professor para cada cargo, temos: 20 x 19 x 18 = 6840 casos possíveis.

6. Uma sala tem seis lâmpadas com interruptores independentes. De quantos modos pode-se ilumina-la, se pelo menos uma das lâmpadas deve ficar acesa?

Solução 1. Como a lâmpada pode ficar acesa ou apagada, cada uma tem duas condições. Há um total de 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^6 = 64 casos. Mas como um sempre deve ficar acesa, temos que excluir o caso todas apagadas. Logo, há 64 – 1 = 63 modos.

Solução 2. Essa supõe uma combinação de resultados onde podemos ter:

i) 1 acesa e 5 apagadas: $\boxed{C_6^1 \times C_5^5 = 6x1 = 6}$.

ii) 2 acesas e 4 apagadas: $\boxed{C_6^2 \times C_4^4 = \frac{6!}{2!4!} x1 = \frac{6.5.4!}{2!4!} = 15}$.

iii) 3 acesas e 3 apagadas: $\boxed{C_6^3 \times C_3^3 = \frac{6!}{3!3!} x1 = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = 20}$.

iv) 4 acesas e 2 apagadas: $\boxed{C_6^4 \times C_2^2 = \frac{6!}{4!2!} x1 = \frac{6.5.4!}{4!2!} = 15}$.

v) 5 acesas e 1 apagadas: $\boxed{C_6^5 \times C_1^1 = 6x1 = 6}$.

vi) 6 acesas e 0 apagadas: $\boxed{C_6^6 = 1}$.

Total: 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 possibilidades.

7. Determine a quantidade de números de três algarismos que tem pelo menos dois algarismos repetidos.

Solução. Total de números de 3 algarismos: 9 x 10 x 10 = 900.
Total de números de 3 algarismos distintos: 9 x 9 x 8 = 648.
Total de números de 3 algarismos com pelo menos dois repetidos: 900 – 648 = 252.

8. Uma bandeira é formada de 7 listras que devem ser formadas de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pinta-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

Solução. Considerando as 7 listras, a partir da 1ª temos:
i) 1ª listra pode ser com qualquer das 3 cores.
ii) 2ª listra será pintada com 2 cores possíveis, diferente da 1ª listra.
ii) 3ª listra também terá duas cores possíveis, pois a 1ª cor já poderá ser reutilizada.
Este procedimento mostra que temos: 3.2.2.2.2.2.2 = 3.2^6 = 3.(64) = 192 formas diferentes de pintar.

9. (UFRJ) Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro "Combinatória é fácil" e 5 exemplares de "Combinatória não é difícil". Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de "Combinatória não é difícil" nunca estejam juntos.

Solução. Colocando os 11 livros de "Combinatória é fácil" primeiramente deixando um espaço entre eles, temos: _ CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_CF_.

Há 12 espaços vazios onde os livros "Combinatória não é difícil" podem entrar sem ficarem juntos. O problemas se resume a escolher 5 lugares dentre os 12 disponíveis:

$$\boxed{C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{5!7!} = 11.9.8 = 792 \text{ formas}}.$$

10. (UFRJ) A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, todos variando de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera, mas sabe que atende às condições:
1ª) se o primeiro algarismo é ímpar, então o último também é ímpar; 2ª) se o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro; 3ª) a soma dos segundo e terceiro algarismos é 5.
Quantas combinações diferentes atendem às condições do Dr. Z?

Solução. De acordo com as informações, as possibilidades para o 2º e 3º algarismos são: (2,3), (3,2), (1,4), (4,1),(5,0), (0,5).

i) 1º e 5º ímpares: <u>5 possibilidades</u>.(6 possibilidades).<u>10 possibilidades</u>. <u>5 possibilidades</u>.

ii) 1º par e 5º igual ao 1º: <u>5 possibilidades</u>.(6 possibilidades).<u>10 possibilidades</u>. 1 <u>possibilidades</u>.

Total: (5.6.10.5) + (5.6.10.1) = 1500 + 300 = 1800 combinações diferentes.

11. Uma equipe esportiva composta por 6 jogadoras está disputando uma partida de 2 tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo podem ser feitas até 3 substituições e, para isto, o técnico dispões de 4 jogadoras no banco. Quantas formações distintas podem iniciar o segundo tempo?

Solução. Importante lembrar que o número de atletas que saem é igual ao número de atletas que entram e há combinações na saída e na entrada.

- nenhuma substituição: 1 forma (mesma do 1º tempo).

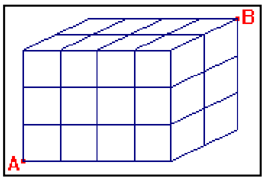
- 1 substituição: escolher 1 para sair dentre 6 e 1 para entrar dentre 4: $\boxed{C_6^1 \times C_4^1 = 6x4 = 24}$.

- 2 substituições: escolher 2 para sair dentre 6 e 2 para entrar dentre 4: $\boxed{C_6^2 \times C_4^2 = 15x6 = 90}$.

- 3 substituições: escolher 3 para sair dentre 6 e 3 para entrar dentre 4: $\boxed{C_6^3 \times C_4^3 = 20x4 = 80}$.

Total: 1 + 24 + 90 + 80 = 195 formas distintas.

12. Sendo possível somente percorrer as arestas dos cubos abaixo, quantos caminhos diferentes podemos fazer indo do ponto A até o ponto B, percorrendo o mínimo de arestas possível?



Solução. Problema semelhante ao bidimensional. Há 4 caminhos no comprimento, 2 na largura e 3 na altura. Ou seja, o número de anagramas de CCCCLLHHH:

$$\boxed{\frac{8!}{4!2!3!} = \frac{9.8.7.6.5.4!}{4!2!3!} = 9.4.7.5 = 1260 \text{ caminhos}}.$$

13. Quantos anagramas têm a palavra ARITMÉTICA?

Solução. Utilizando a permutação com elementos repetidos, temos:

$$\boxed{\frac{10!}{2!2!2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2!}{8} = 10.9.7.6.5.4.3.2 = 453600 \text{ anagramas}}.$$

14. Quantos anagramas da palavra EDITORA começam com A e terminam com E?

Solução. Fixando o A e o E, temos: A _ _ _ _ _ E. Os elementos centrais permutam: 5! = 120.

15. (FGV) Calcule o número de permutações da palavra ECONOMIA que não começam nem terminam com a letra O.

Solução 1. Na configuração _ (_ _ _ _ _ _) _ os espaços entre parênteses são os possíveis a serem ocupados pela letra O. Há 6 espaços e escolhemos dois deles: $C_6^2 = 15$**. Uma vez fixados esses dois lugares, basta permutar as 6 letras restantes. Logo, são:** $\boxed{6!\,xC_6^2 = (720)x15 = 10800 \text{ anagramas}}$.

Solução 2. Calculando as possibilidades totais e subtraindo das ocorrências indesejadas.

- Total de anagramas: $\boxed{\frac{8!}{2!}=\frac{8.7.6!}{2}=4.7.(720)=20160\text{ anagramas}}$.

- Total de anagramas iniciando com O: $\boxed{7!=7.(720)=5040\text{ anagramas}}$.

- Total de anagramas terminando com O: $\boxed{7!=7.(720)=5040\text{ anagramas}}$.

- Total de anagramas iniciando e terminando com O (interseção): $\boxed{6!=720\text{ anagramas}}$.

- Total de anagramas pedido: $\boxed{20160-(5040+5040-720)=20160-9360=10800\text{ anagramas}}$.

16. Um estudante ganhou quatro livros diferentes de matemática, três diferentes de física e dois diferentes de química. Querendo manter juntos os da mesma disciplina, calculou que poderá enfileirá-los de diferentes modos numa prateleira de estante. Calcule essa quantidade de modos.

Solução. Uma forma seria (M1M2M3M4)(F1F2F3)(Q1Q2). Podem permutar entre si e entre as ordens das matérias: 3! x (4! x 3! x 2!) = 6 x (24 x 6 x 2) = 6 x 288 = 1728 modos.

17. Em uma empresa há 6 sócios brasileiros e 4 japoneses. A diretoria será composta por 5 sócios, sendo 3 brasileiros e 2 japoneses. De quantos modos essa composição poderá ocorrer?

Solução. Serão escolhidos 3 brasileiros dentre 6 e 2 japoneses dentre 4: $\boxed{C_6^3\times C_4^2=20x6=120}$.

18. (UERJ) Um estudante possui dez figurinhas, cada uma com o escudo de um único time de futebol, distribuídas de acordo com a tabela. Para presentear um colega, o estudante deseja formar um conjunto com cinco dessas figurinhas, atendendo, simultaneamente, aos seguintes critérios:

– duas figurinhas deverão ter o mesmo escudo;

– três figurinhas deverão ter escudos diferentes entre si e também das outras duas.

De acordo com esses critérios, o número máximo de conjuntos distintos entre si que podem ser formados é igual a:

Time/ escudo	Quantidade de figurinhas idênticas
A	3
B	2
C	1
D	1
E	1
F	1
G	1

a) 32
b) 40
c) 56
d) 72

Solução. Como duas figurinhas são de mesmo escudo, então em cada grupo deve ter duas do time A ou duas do time B, completando as demais com figurinhas diferentes dessas. Entretanto, pode haver um grupo com duas do time B e uma do time A além de duas do time A com uma do time B. As opções são:

i) A A (Três dentre B C D E F G): $\boxed{1.C_6^3=1.\left(\frac{6!}{3!3!}\right)=1.\left(\frac{6.5.4.3!}{3!3!}\right)=20}$.

ii) B B (Três dentre A C D E F G): $\boxed{1.C_6^3=1.\left(\frac{6!}{3!3!}\right)=1.\left(\frac{6.5.4.3!}{3!3!}\right)=20}$.

OBS: As figurinhas são idênticas, logo AA e BB representam um único bloco. O que vai diferenciar os conjuntos é o bloco com as três figurinhas diferentes entre si.
Total = 20 + 20 = 40 conjuntos.

19. (UERJ) Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007. Um desses grupos está apresentado a seguir.

Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente. Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

a) 24
b) 35
c) 70
d) 140

Solução. O grupo mostrado constitui um conjunto onde a ordem dos elementos não importa. Então foram feitos grupamentos de quatro elementos. Logo, uma combinação.

$$\text{Total}: C_7^4 = \left(\frac{7!}{4!3!}\right) = \left(\frac{7.6.5.4!}{4!3!}\right) = (7)(5) = 35.$$

20. (UERJ) Considere como um único conjunto as 8 crianças – 4 meninos e 4 meninas – personagens da tirinha. A partir desse conjunto, podem-se formar ***n*** grupos, não vazios, que apresentam um número igual de Meninos e de meninas. O maior valor de *n* é equivalente a:

O Globo, 18/03/2009

a) 45
b) 56
c) 69
d) 81

Solução. Podem ser feitos grupos de 2, 4, 6 e 8 crianças com número igual de meninos e meninas. Como grupos independem da ordem de formação, temos as possíveis combinações:

$$n = C_4^1.C_4^1 + C_4^2.C_4^2 + C_4^3.C_4^3 + C_4^4.C_4^4 = (4)(4) + (6)(6) + (4)(4) + (1)(1) = 16 + 36 + 16 + 1 = 69.$$

21. (FGV) Calcule o número de permutações da palavra ECONOMIA que não começam nem terminam com a letra O.

Solução 1. Excluindo a letra O das extremidades e calculando a permutação com repetição da letra O, temos: $\dfrac{\neq O}{6p}.\left(\dfrac{6!}{2!}\right).\dfrac{\neq O}{5p} \Rightarrow (6).\left(\dfrac{6.5.4.3.2!}{2!}\right).(5) = (6).(6.5.4.3).(5) = (6).(360).(5) = (30).(360) = 10800.$

22. (UERJ) Numa cidade os números telefônicos não podem começar por zero e têm oito algarismos dos quais os quatro primeiros constituem o prefixo. Considere que os quatro últimos dígitos de todas as farmácias são (0000) e que o prefixo da farmácia Vivavida é formado pelos dígitos 2, 4, 5 e 6, não repetidos e não necessariamente nessa ordem. O número máximo de tentativas a serem feitas para identificar o número telefônico completo dessa farmácia equivale a:

Solução. Os últimos quatro dígitos não influenciam nas tentativas, pois são nulos e não estão incluídos nos quatro primeiros. Logo há 4! = 4.3.2.1 = 24 tentativas possíveis.

23. (FUVEST) Dez meninas e seis meninos participarão de um torneio de tênis infantil. De quantas maneiras distintas essas 16 crianças podem ser separadas nos grupos A, B, C e D, cada um deles com 4 jogadores, sabendo que os grupos A e C serão formados apenas por meninas e o grupo B, apenas por meninos?

Solução. As formas como os grupos são formados são diferentes, pois há uma nomeação. Temos:

$$\text{Total} = A(\text{Meninas}).B(\text{Meninos}).C(\text{Meninas}).D(\text{Meninas e meninos}) = C_{10}^4.C_6^4.C_6^4.C_2^2.C_2^2 \Rightarrow$$
$$\text{Total} = \left(\frac{10.9.8.7.6!}{6!4!}\right).\left(\frac{6.5.4!}{2!4!}\right).\left(\frac{6.5.4!}{2!4!}\right).(1) = \left(\frac{10.9.8.7}{24}\right).(15).(15) = (210).(225) = 47250.$$

24. (FUVEST) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

Solução. Considere as empresas como E1, E2 e E3, os trabalhos como T1, T2, T3, T4. Cada um dos trabalhos será associado a uma das empresas. Logo, em princípio, haveria (4).(3) = 12 distribuições possíveis. Mas perceba que uma das empresas receberá dois trabalhos. Como cada uma das três possuem a mesma possibilidade, há no total 3.(12) = 36 formas distintas de distribuir os trabalhos.

25. (UERJ) A tabela apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano. Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a **n** e no país Y igual a **p**. A razão corresponde $\frac{n}{p}$ a:

País	Descrição do critério	Exemplo de placa
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem.	M3MK09
Y	Um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem.	YBW0299

a) 1
b) 2
c) 3
d) 6

Solução. No país X temos que considerar todas as possibilidades de letras e números, mas como se misturam, há repetições nas permutações, por exemplo: MM3K99 e MMK399 onde se os M's ou 9's trocarem de lugar seriam contados duas vezes. Logo, $\boxed{n = (26).(26).(26).(10).(10).(10)\frac{(6!)}{3!3!}}$.

No país Y as letras ficam sempre no mesmo bloco e os números também mantendo a posição LN. Logo, $\boxed{p = (26).(26).(26).(10).(10).(10).(10)}$.

Calculando a razão pedida, temos:

$$\boxed{\frac{n}{p} = \frac{(26).(26).(26).(10).(10).(10).\frac{(6!)}{3!3!}}{(26).(26).(26).(10).(10).(10).(10)} = \frac{\frac{(6!)}{3!3!}}{(10)} = \frac{\frac{6.5.4.3!}{3!3!}}{(10)} = \frac{5.4}{10} = \frac{20}{10} = 2}.$$

26. (UERJ) Na ilustração abaixo, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.
Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:

O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:
a) 624
b) 676
c) 715
d) 720

Solução 1. A escolha de qualquer carta inicialmente pode ser feita de 52 formas distintas. A segunda carta terá que ser uma com valor dentre os 12 restantes (diferentes da primeira). A terceira, quarta e quinta carta possuem o mesmo valor da segunda, logo com 1 única possibilidade para cada. Pelo princípio multiplicativo, temos: (52).(12).(1).(1).(1) = 624 conjuntos.

Solução 2. Escolha da quadra: 13 possibilidades (valores). A quinta carta possui 48 (52 – 4) possibilidades. Total: (13).(48) = 624 conjuntos.

27. (FUVEST) Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem. Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todas se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

a) 16 **b)** 17 c) 18 d) 19 e) 20

Solução. Considerando x o número de homens e y o número de mulheres, o número de apertos de mãos entre os homens será de $2.\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]=x(x-1)$**, já que o aperto acontece duas vezes. Na entrada e saída. Entre homens e mulheres, o total será de (x.y). Considerando ainda que x + y = 37, temos:**

$$\begin{cases} x(x-1)+xy=720 \\ y=37-x \end{cases} \Rightarrow x(x-1)+x(37-x)=720 \Rightarrow x^2-x+37x-x^2=720 \Rightarrow x=\frac{720}{36}=20.$$

O número de mulheres será 37 – 20 = 17.

28. As antigas placas para automóveis, com duas letras seguidas de quatro algarismos, foram substituídas por novas com três letras seguidas de quatro algarismos. Nestas placas, bem como nas antigas, são utilizadas as 23 letras do alfabeto português, mais as letras K, W, Y. Quantos carros a mais puderam ser emplacados com o novo sistema?

a) 17576.10^4 b) 17576.10^5 c) 676.10^5 d) 676.10^4 **e)** 169.10^6

Solução. A quantidade a mais será a diferença entre o número de carros emplacados atualmente e o número anterior:

$$\begin{aligned} &\text{Antes}: (LL)(NNNN) = (26).(26).(10).(10).(10).(10) = 26^2.10^4 \\ &\text{Atual}: (LLL)(NNNN) = (26).(26).(26).(10).(10).(10).(10) = 26^3.10^4 \\ &\text{Diferença}: 26^3.10^4 - 26^2.10^4 = 26^2.10^4(26-1) = 26^2.25.10^4 = 16900.10^4 = 169.10^2.10^4 = 169.10^6 \end{aligned}$$

29. (FGV) Deseja-se criar uma senha para os usuários de um sistema, começando por três letras escolhidas entre as cinco A, B, C, D e E seguidas de quatro algarismos escolhidos entre 0, 2, 4, 6 e 8. Se entre as letras puder haver repetição, mas se os algarismos forem todos distintos, o número total de senhas possíveis é:

a) 78125 b) 7200 **c)** 15000 d) 6420 e) 50

Solução. A senha terá as seguintes possibilidades:

Letras (podem ser repetidas			Algarismos (distintos)			
5 opções	5 opções	5 opções	5 opções	4 opções	3 opções	2 opções

Pelo princípio multiplicativo, temos: 5 x 5 x 5 x 5 x 4 x 3 x 2 = 15000 senhas.

30. (UERJ) As tabelas abaixo mostram os palpites de três comentaristas esportivos sobre os resultados de cinco diferentes times de futebol, em cinco partidas a serem realizadas.

Comentarista A

Time	Empate	Vitória	Derrota
1			x
2			x
3	x		
4			x
5		x	

Comentarista B

Time	Empate	Vitória	Derrota
1			x
2			x
3		x	
4	x		
5		x	

Comentarista C

Time	Empate	Vitória	Derrota
1	x		
2		x	
3		x	
4			x
5		x	

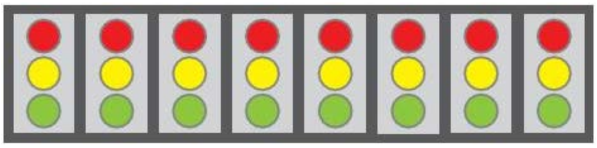
O resultado de cada time foi acertado por pelo menos dois comentaristas. Se NA, NB e NC são os números de palpites certos dos comentaristas A, B e C, a relação entre eles pode ser expressa por:

a) NA > NB > NC
b) NA > NB = NC
c) NA = NB > NC
d) NA = NB = NC

Times	Comentarista A	Comentarista B	Comentarista C
1	Acertou	Acertou	Errou
2	Acertou	Acertou	Errou
3	Errou	Acertou	Acertou
4	Acertou	Errou	Acertou
5	Acertou	Acertou	Acertou

Solução. Como cada opção foi acertada pelo menos duas vezes, basta em cada caso verificar onde houve duas opções iguais: NA = 4; NB = 4; NC = 3.

31. Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes − vermelha, amarela e verde. Observe a figura. Considere as seguintes informações:



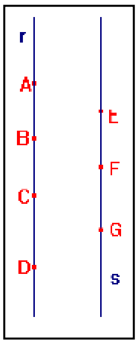
• cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
• qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
• duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.
a) 4800
b) 1580
c) 2400
d) 1680

Solução 1. Há $\boxed{C_8^6 = \left(\frac{8!}{6!2!}\right) = \left(\frac{8.7.6!}{6!2!}\right) = (4)(7) = 28}$ **maneiras de 6 módulos ficarem acesos. Em cada uma haverá a permutação das cores: (VERM) (VERM) (VERM) (VERDE) (VERDE) (AMARELA), num total de** $\boxed{\frac{6!}{3!2!} = \frac{6.5.4.3!}{3!2!} = 60}$**. Logo são (60).(28) = 1680 mensagens distintas.**

Solução 2. Como haverá 2 módulos vazios, temos uma permutação com repetição da configuração: (VERM) (VERM) (VERM) (VERDE) (VERDE) (AMARELA) (VAZIO) (VAZIO): $\boxed{\frac{8!}{3!2!2!} = 1680}$**.**

32. Os pontos A, B, C e D pertencem à reta r, e os pontos E, F e G pertencem à reta s, sendo **r//s**. Quantos triângulos podemos formar com esses vértices?



a) 20
b) 30
c) 40
d) 50

Solução1. Escolhendo a reta das bases e dos vértices dos triângulos, temos:

$$\boxed{\begin{cases} \text{base(reta r);vértice(reta s)}: C_4^2.C_3^1 = \frac{4.3.2!}{2!2!}.\frac{3!}{1!0!} = 6.3 = 18 \\ \text{base(reta s);vértice(reta r)}: C_3^2.C_4^1 = \frac{3.2!}{2!1!}.\frac{4.3!}{1!3!} = 3.4 = 12 \end{cases} \Rightarrow 18 + 12 = 30}$$

Solução 2. Podemos agrupar os 7 pontos 3 a 3: $\boxed{C_7^3 = \frac{7.6.5.4!}{3!4!} = 35}$**. Mas nesses grupamentos há 4 pontos alinhados tanto na reta <u>r</u> e 3 pontos alinhados na reta <u>s</u>.**
Logo os grupamentos válidos são: 35 – 1 – 4 = 30.