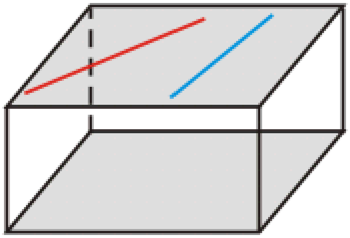
Geometria de Posição

Continuação

Prof. Jarbas

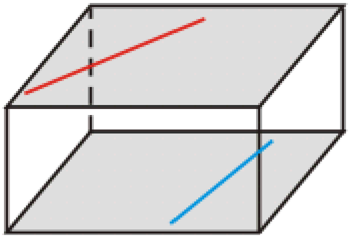
POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS NO ESPAÇO

O que são retas coplanares ?



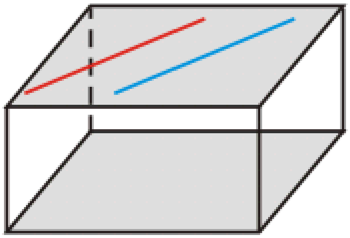
São retas contidas num mesmo plano.

O que são retas reversas ?



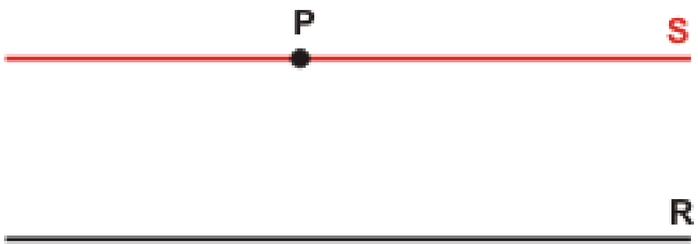
São retas que não estão contidas num mesmo plano.

O que são retas paralelas ?



São retas coplanares que não possuem ponto comum.

Qual é o Postulado de Euclides ?



reta S paralela à reta R

"Por um ponto fora de uma reta só podemos traçar uma paralela a esta reta."

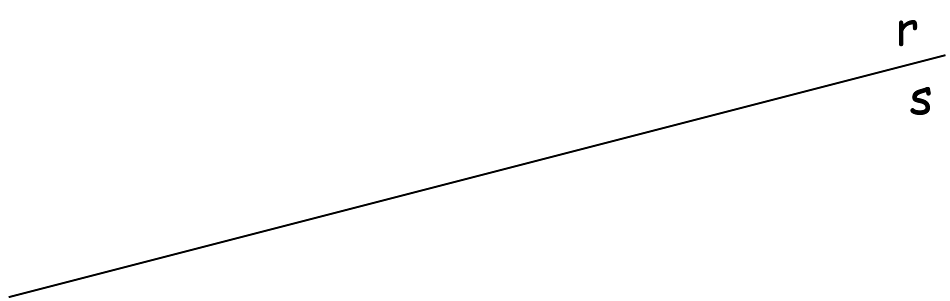
O Postulado de Euclides é a base da geometria que estamos estudando, que por este motivo é denominada de Geometria Euclidiana.

Posições relativas entre duas retas

Consideremos duas retas, r e s, do espaço. Elas podem ser:

- **Coincidentes:** ≡

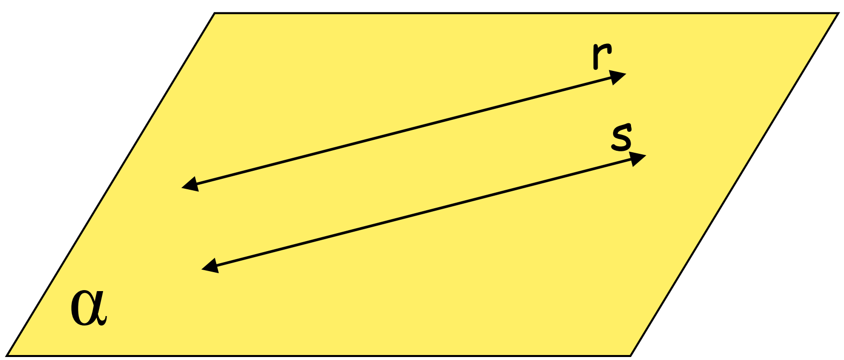
se todos os pontos de uma são pontos da outra.



Indicamos: $r \equiv s$

- Paralelas:

se estão contidas no mesmo plano (coplanares) e não têm ponto comum.

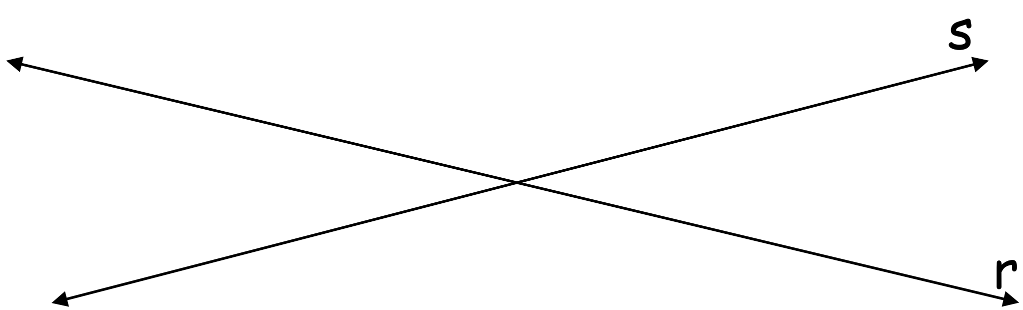


Indicamos: r//s

$$r//s \leftrightarrow \begin{cases} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \cap s = \emptyset \end{cases}$$

- Concorrentes:

Se tem um único ponto em comum.

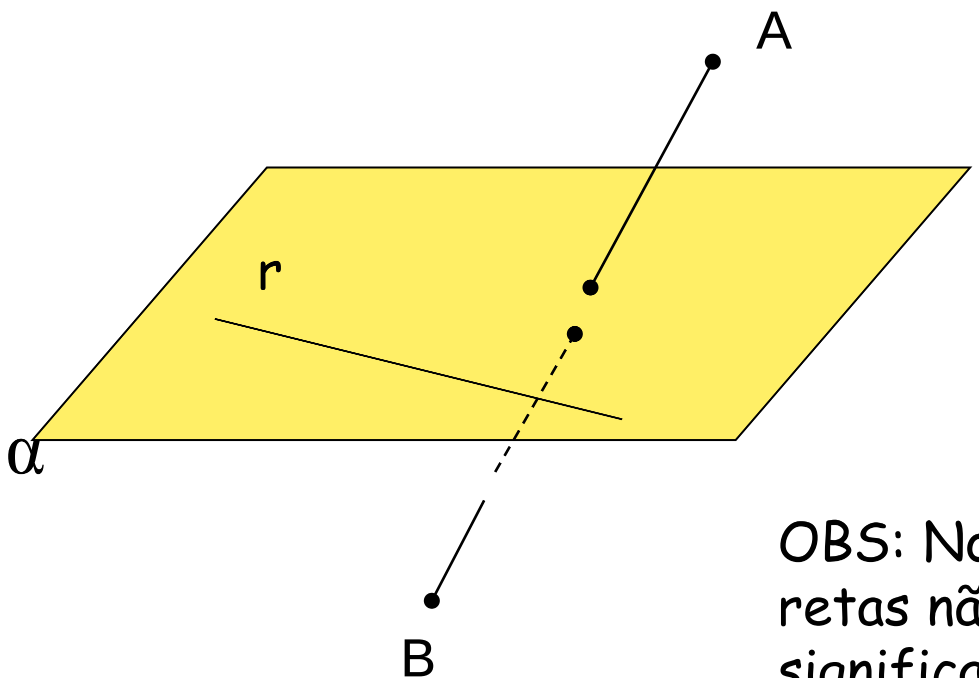


Indicamos: $r \times s$

$$r \times s \leftrightarrow r \cap s = \{P\}$$

- # Reversas (ou não coplanares):

Se não existe plano que as contenha simultaneamente.



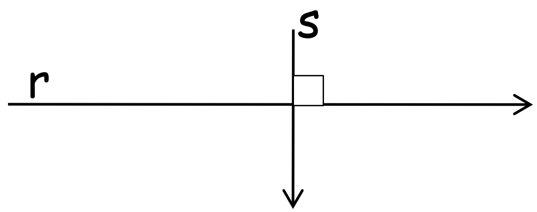
OBS: No espaço, o fato de duas retas não serem paralelas não significa necessariamente que elas sejam concorrentes, como acontece no plano. Duas retas reversas não são paralelas nem concorrentes.

Em resumo, dadas duas retas no espaço, elas podem ser:

- Coplanares:
  - paralelas coincidentes (não determinam plano).
  - paralelas distintas (determinam plano).
  - concorrentes (determinam plano).
- Não coplanares: reversas

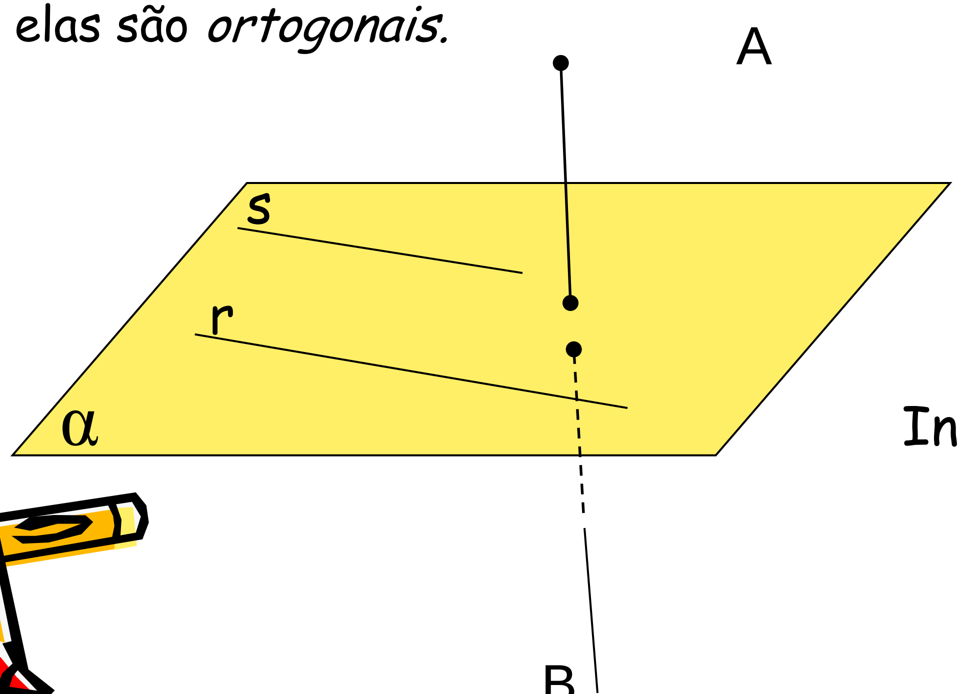
Observação:

1. Se duas retas são concorrentes e formam um ângulo de 90°, dizemos que elas são perpendiculares.



Indicamos: $r \perp s$

2. Se duas retas são reversas e formam um ângulo de 90°, dizemos que elas são *ortogonais.*

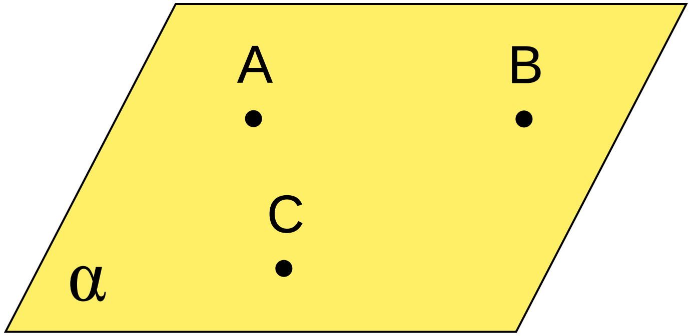


Indicamos: r s

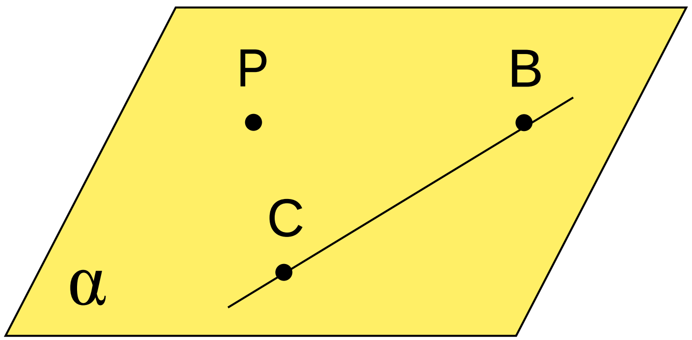
Determinação de planos

Existem quatro maneiras pelas quais um plano fica determinado:

- Por três pontos não-colineares (postulado 5):

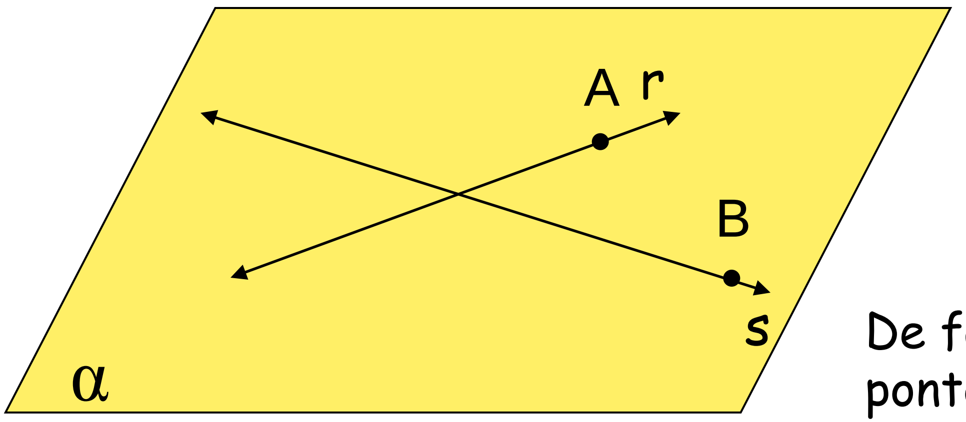


- Por um ponto P e uma reta r, de modo que $P \notin r$:



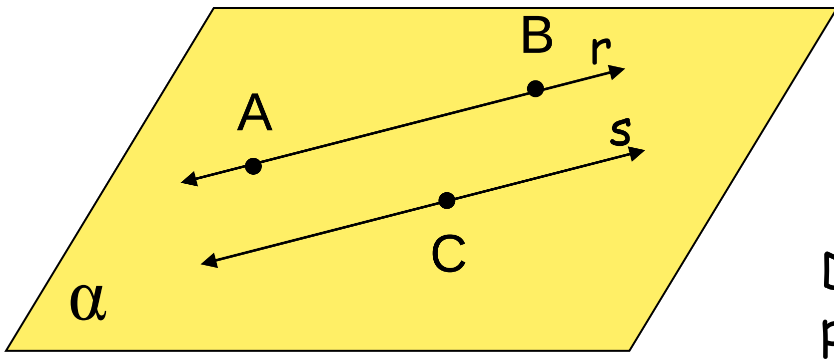
De fato, se considerarmos os pontos distintos B e C de r, teremos três pontos B, C e P não-colineares e, pelo P5 eles determinam um plano.

- Por duas retas concorrentes:



De fato, se considerarmos os pontos distintos A e B de modo que $A \neq P$, $A \in r$, $B \neq P$, $B \in s$, temos que, pelo P5, os pontos A, B e P determinam um plano

- Por duas retas paralelas:



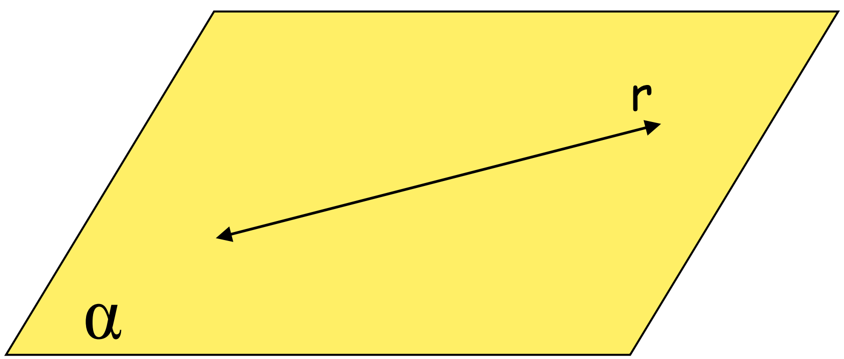
De fato, se considerarmos os pontos distintos A, B e C de modo que $A \in r$, $B \in r$ e $C \in s$, temos que, pelo P5, esses três pontos determinam um plano.

Posições relativas entre uma reta e um plano

Consideremos uma reta e um plano α. Podem ocorrer três casos:

- 1º Caso: r contida em α

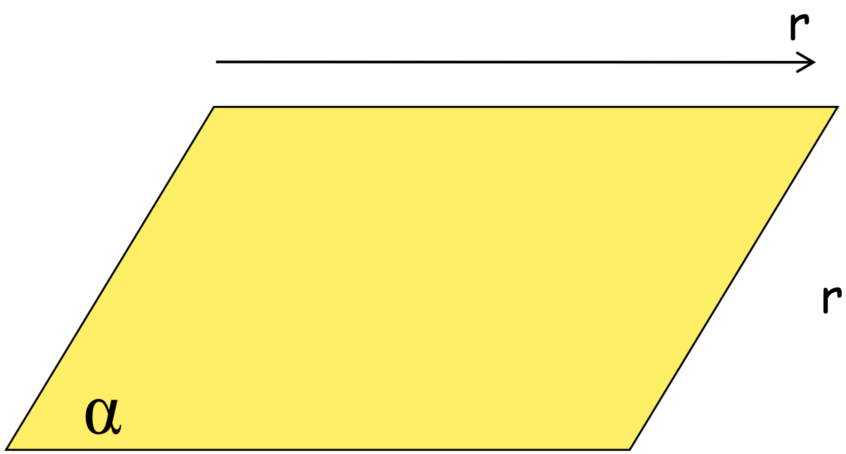
Todos os pontos de r são pontos de α .



$$r \subset \alpha \rightarrow r \cap \alpha = r$$

- 2º Caso: r paralela a α

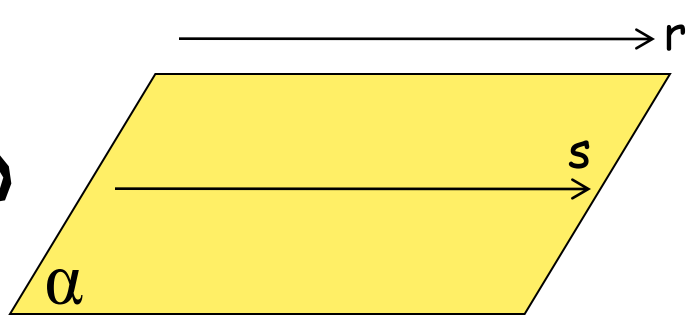
r e α não têm ponto em comum



$r \,//\, \alpha \leftrightarrow r \cap \alpha = \emptyset$

É válido o seguinte teorema:

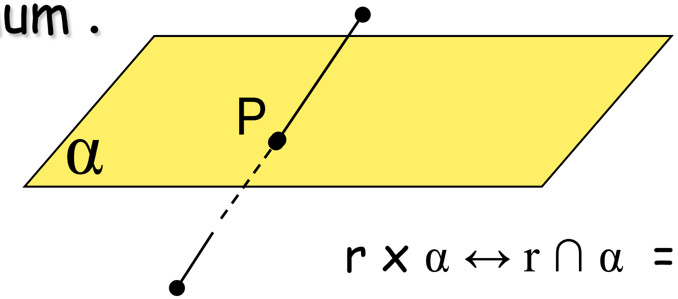
Uma reta r e um plano α são paralelos se, e somente se, existe uma reta s contida em α, de modo que r e s sejam paralelas.



- 3º Caso: r concorrente com α

r e α têm um único ponto em comum .

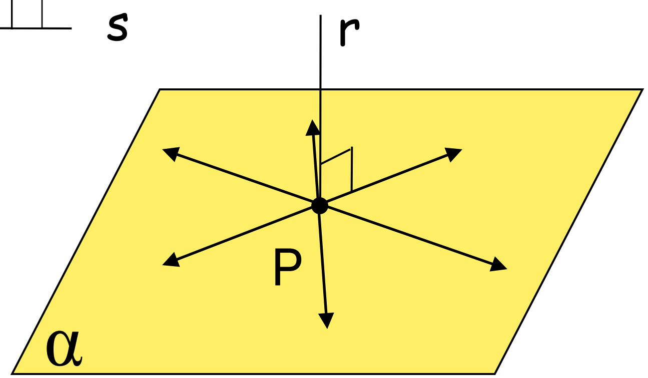
Indicamos: r x α



$r \times \alpha \leftrightarrow r \cap \alpha = \{P\}$

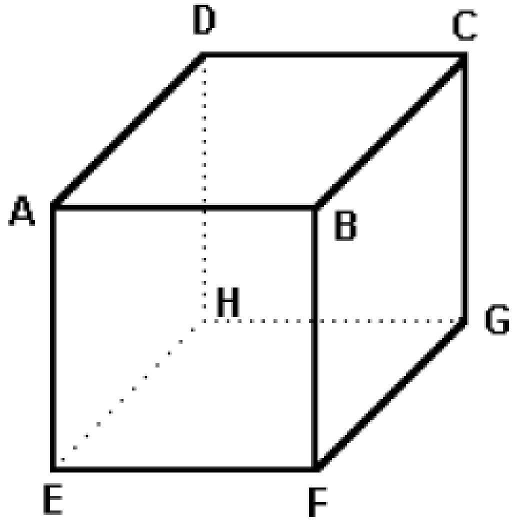
Se r for perpendicular a todas as retas de α que passam por P, então dizemos que r é perpendicular a α

Indicamos: $r \perp s$



EXEMPLOS:

1) Considere o cubo da figura abaixo. Das alternativas a seguir, aquela correspondente a pares de vértices que determinam três retas, duas a duas reversas, é:



a) (A,D); (C,G); (E,H).

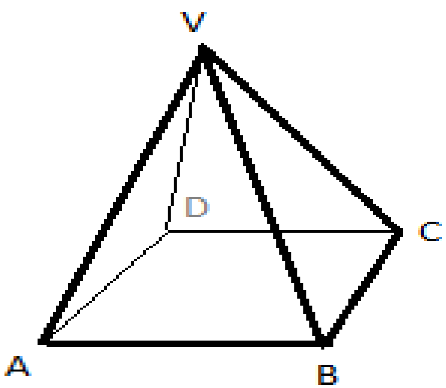
b) (A,E); (H,G); (B,F).

c) (A,H); (C,F); (F,H).

d) (A,E); (B,C); (D,H).

e) (A,D); (C,G); (E,F).

2)A figura abaixo mostra uma pirâmide quadrangular regular.Em que a base da pirâmide e um quadrado. Observando os vértices da pirâmide escreva 2 pares de retas reversas, dois pares de retas paralelas distintas e dois pares de retas concorrentes.



Retas reversas : AB e VC / AB e VD

Retas Paralelas distintas : AB e CD / AD e BC

Retas concorrentes : AB e BC / BC e CV

3) Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares. Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é

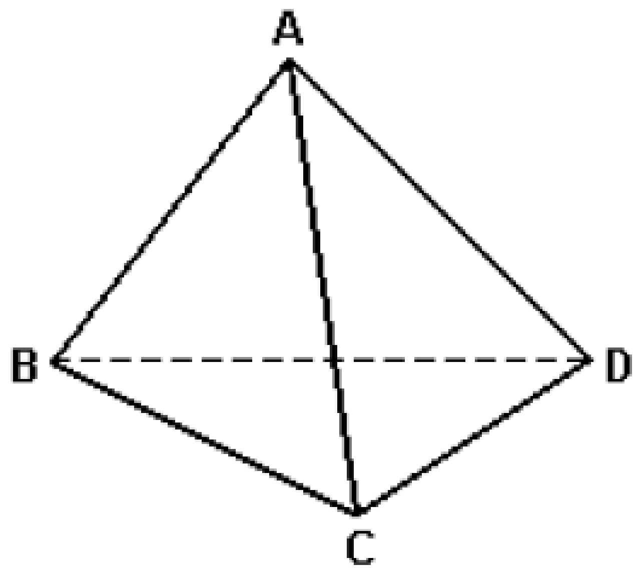
a) 6.

× b) 3.

c) 2.

d) 1.

e) 0.



AB e CD / BC e AD / AC e BD