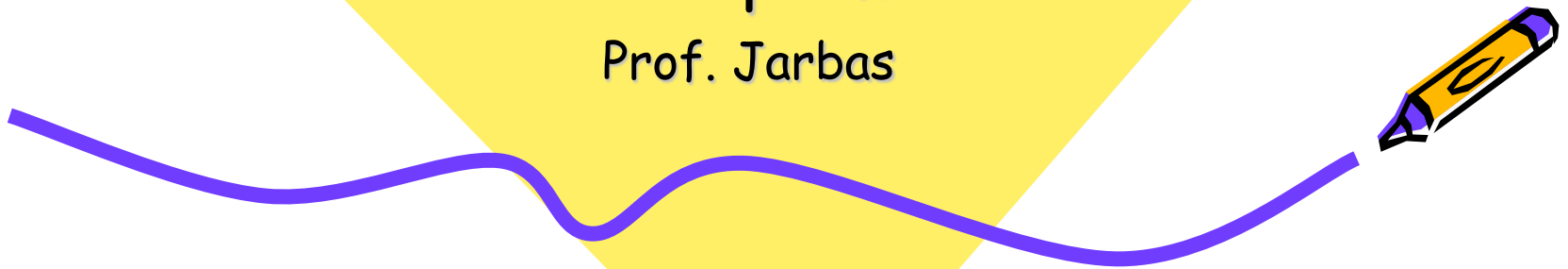




Geometria de Posição

Conceitos primitivos

Prof. Jarbas



Conceitos primitivos

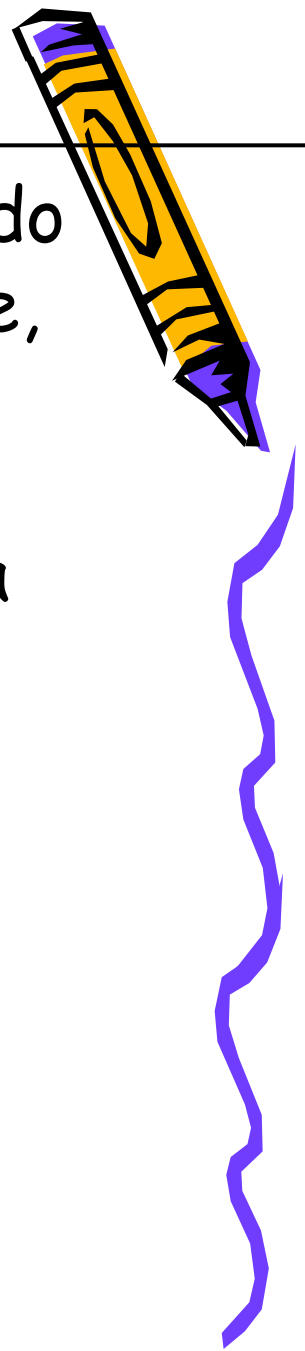


- A partir do mundo real, matemáticos da antiguidade, como Euclides (séc. III a.C.) estabeleceram entes com os quais construíram a geometria. Três desses entes destacam-se por serem conhecidos intuitivamente. São eles: o ponto, a reta e o plano.



O Ponto

- Olhando-se a noite para um céu estrelado vêem-se as estrelas, que, intuitivamente, podem ser consideradas *pontos*. Em geometria, o ponto, elemento concebido sem dimensão, massa nem volume, é uma noção primitiva.



A Reta

- Suponha agora que fosse possível esticar, indefinidamente e nos dois sentidos, um fio de elástico. Em nossa imaginação, e apenas nela, visualizaríamos o que chamamos de reta. Em geometria, o conceito de reta - concebido intuitivamente - também é uma noção primitiva.



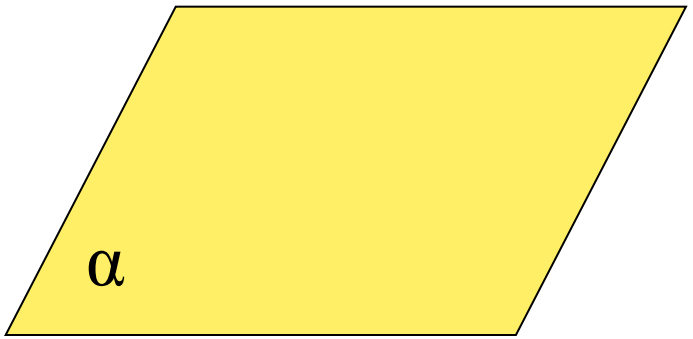
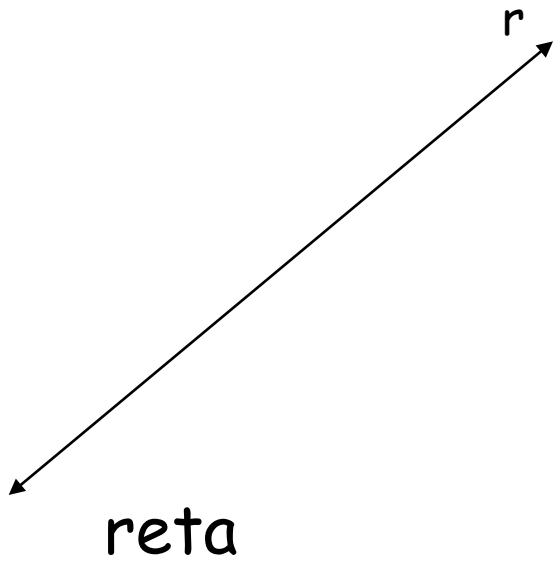
O Plano

- Considere o tampo liso de uma mesa, sem nenhum tipo de fresta ou ondulação. Esse tampo possibilitaria a visualização concreta de um *plano*. Entretanto, o conceito geométrico de plano implica que, por intuição, ele seja entendido ilimitadamente em todas as direções. Plano é uma noção primitiva.



• Representando os conceitos de modo geométrico, temos, então:

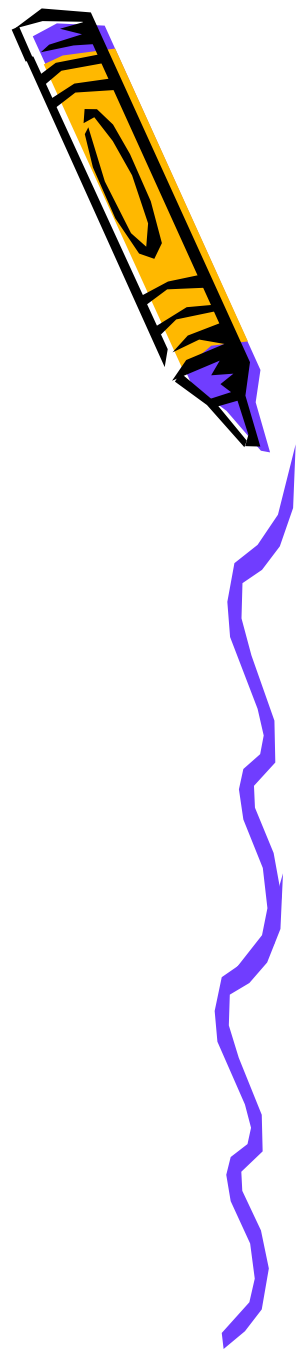
A
•
ponto



plano



- A proposição usada por Hilbert (1862 - 1943), e normalmente adotada por nós, é a seguinte:



- Os pontos são indicados por letras maiúsculas (A, B, C etc.).
- As retas são indicadas por letras minúsculas (r, s, t etc.).
- Os planos são indicados por letras gregas (α, β, γ etc.).

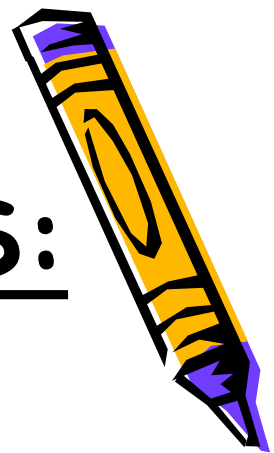


AXIOMAS OU POSTULADOS:

SÃO CONSTATAÇÕES QUE NÃO NECESSITAM SER PROVADAS PARA QUE SEJAM CONSIDERADAS VERDADEIRAS.

TEOREMAS:

PROPOSIÇÕES QUE PODEM SER DEMONSTRADAS, PARTINDO DE FATOS JUSTIFICÁVEIS.



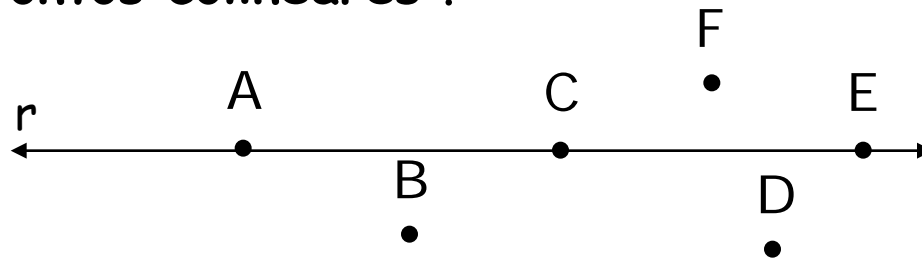
Posições primitivas, postulados ou axiomas.

Postulados da existência

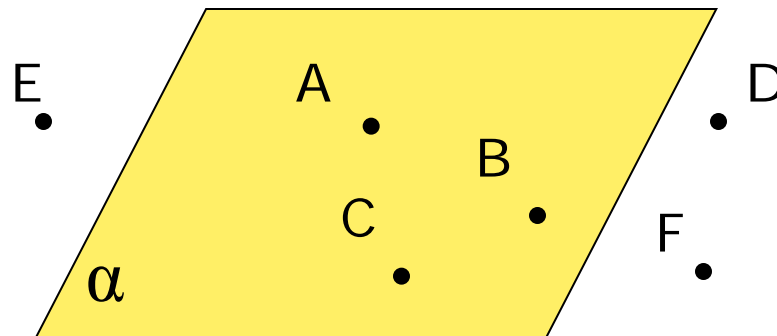
P1 - Existem infinitos pontos

P2 - Em uma reta e fora dela *existem infinitos* pontos

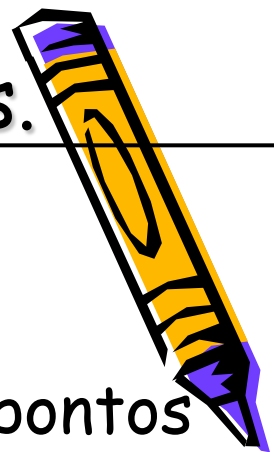
Observação: Os pontos pertencentes a uma mesma reta são chamados de "Pontos colineares".



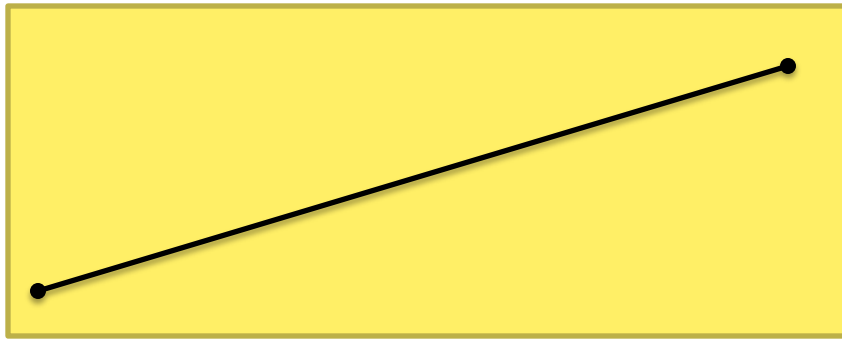
P3 - Em um plano e fora dele *existem infinitos* pontos



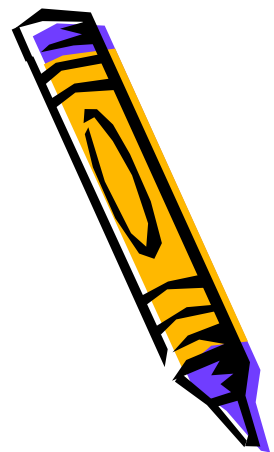
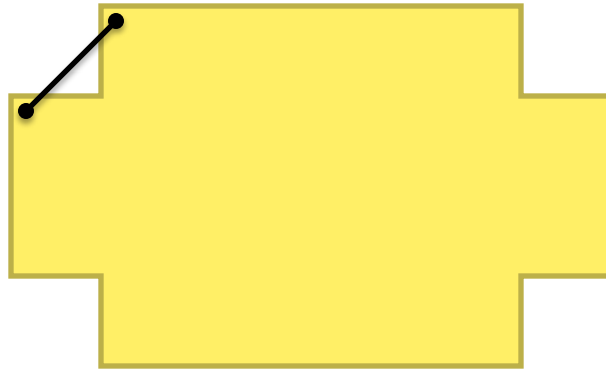
Observação: Os pontos pertencentes a um mesmo plano são chamados de "Pontos Coplanares".



REGIÃO CONVEXA

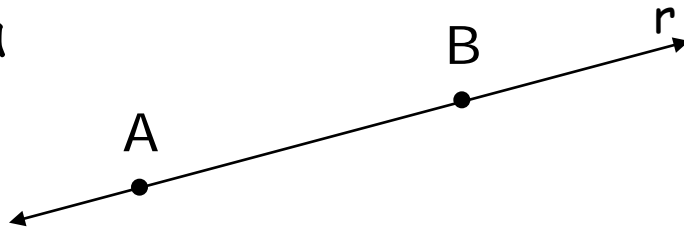


REGIÃO CÔNCAVA (NÃO CONVEXA)



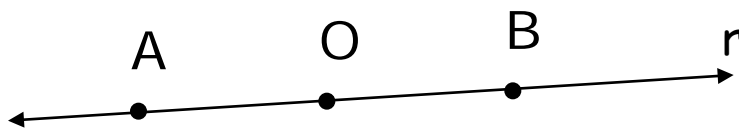
Postulados da determinação da reta

P4 - Dois pontos distintos *determinam* uma única reta



Segmentos de reta e semirreta

Todo ponto de uma reta, separa-a em duas partes às quais ela pertence.

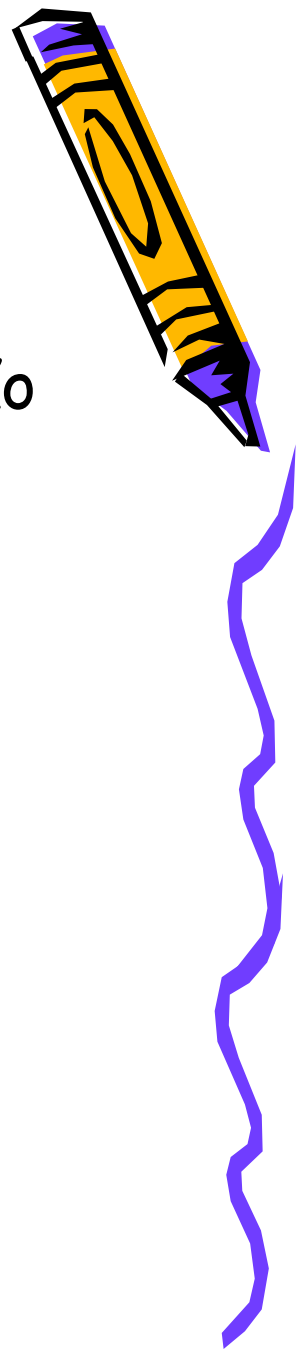
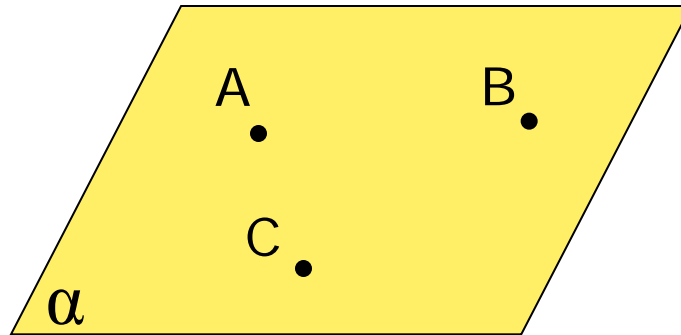


\overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são semi-retas opostas de origem O.



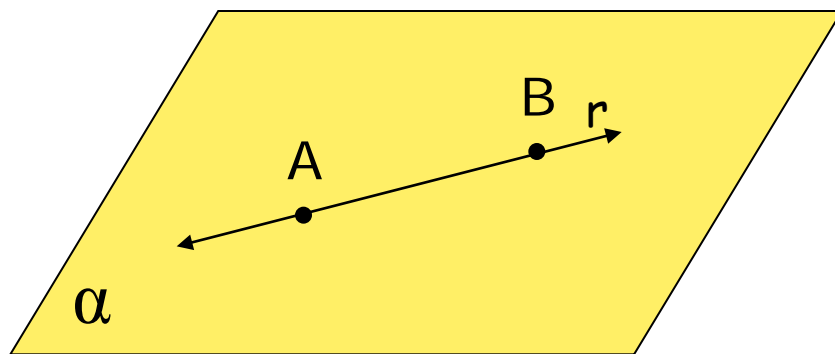
Postulados da determinação do plano

P5 - Três pontos não-colineares (não alinhados) *determinam* um único plano; ou seja se A , B e C são três pontos não colineares, então existe um único plano ao qual os pontos A , B e C pertencem simultaneamente.

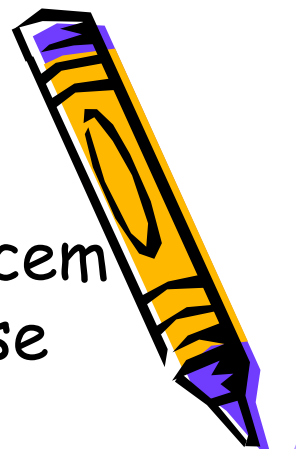


Postulado da inclusão

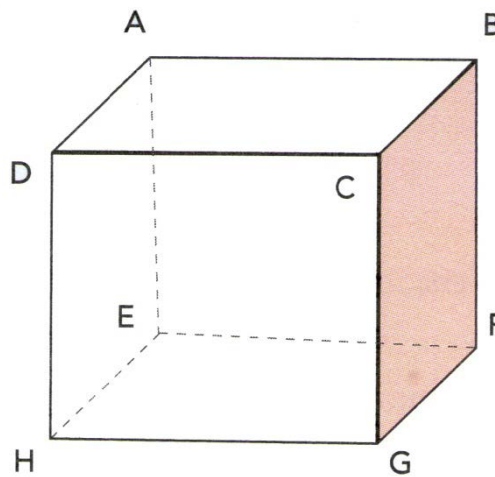
P6 - Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, a reta está contida (está inclusa) nesse plano



$$\left. \begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \\ A \in r \\ B \in r \end{array} \right\} r \subset \alpha$$



Exemplo



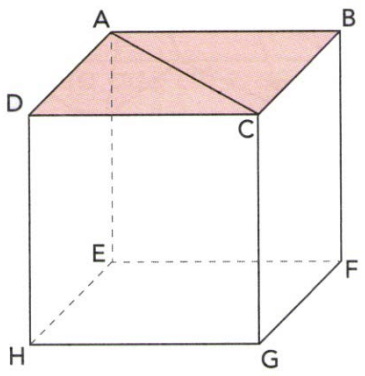
1) Em relação ao cubo acima responda:

- Quantas retas passam por um dos seus vértices ? **Infinitas**
- Dentro das retas suportes do cubo, quantas retas passam por um dos seus vértices ? **7**
- Qual é o número de retas suporte determinadas? **$8 \times 7 / 2 = 28$**
- Cite quatro planos que contém a diagonal AC da face superior.

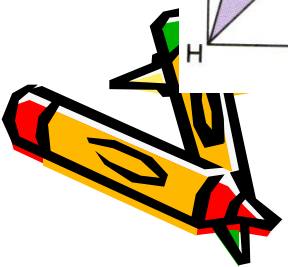
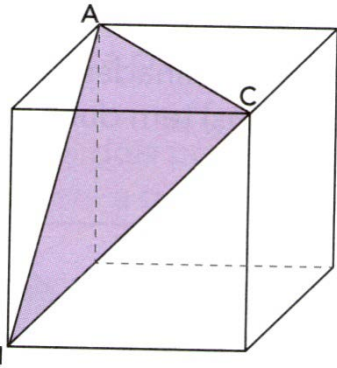


Solução do item d :

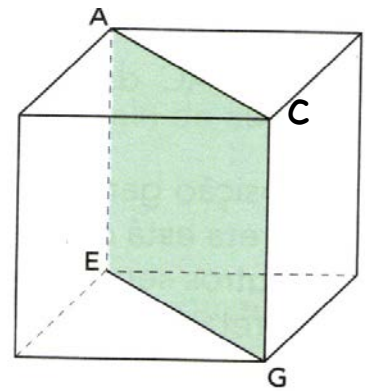
$$PL(ACB) = PL(ACD) = PL(ABCD)$$



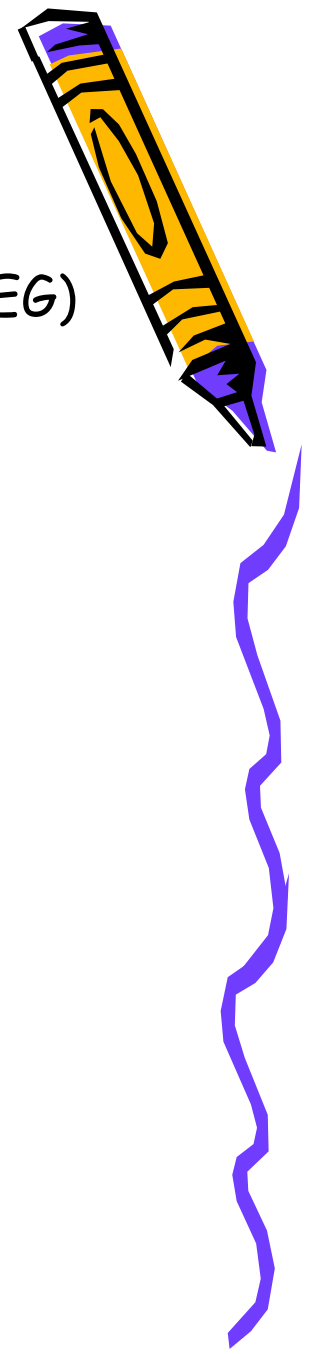
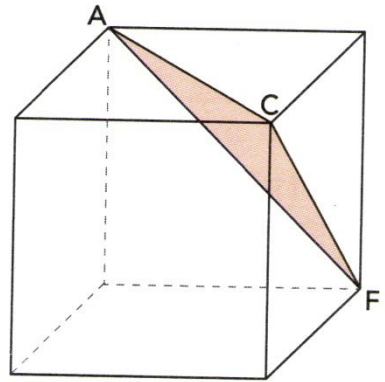
PL(ACH)



$$PL(ACE) = PL(ACG) = PL(ACEG)$$

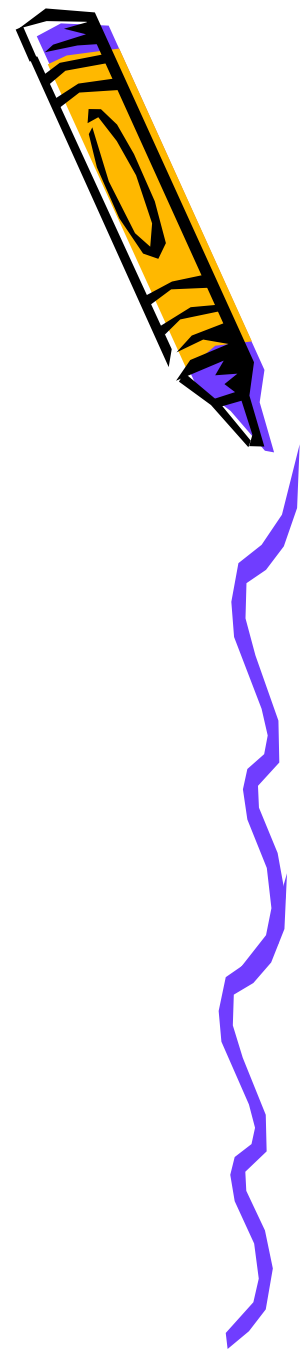


PL(ACF)



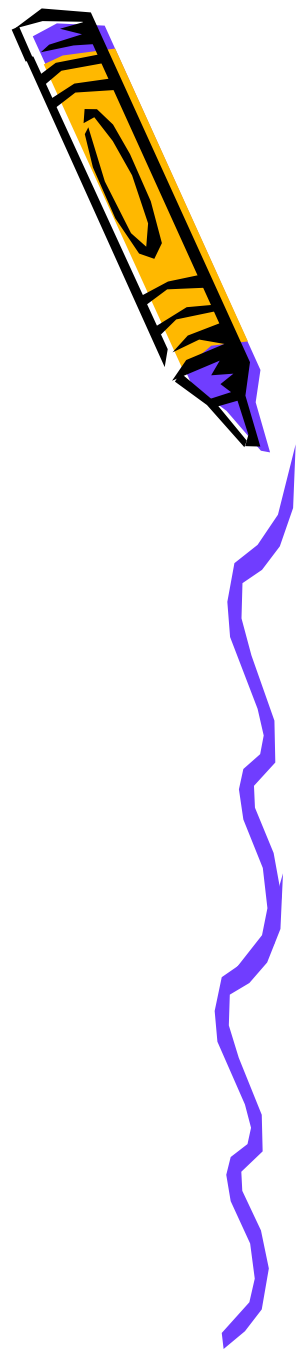
Atividades de Sala

1. Sem dúvida, um dos grandes feitos de Euclides foi a maneira formal com que ele apresentou o conteúdo de seu célebre livro *Os Elementos*, conjunto de 13 livros dedicados ao fundamento e desenvolvimento lógico e sistemático da geometria. Os princípios dos quais parte Euclides para edificar a geometria são as definições, os entes primitivos e os postulados.
 - a) Como é chamada uma afirmação indubitável, inquestionável, evidente por si só, que não carece de demonstração? **Postulados ou Axiomas**
 - b) Quais foram os entes primitivos (conceitos primitivos) utilizados por Euclides na sistematização da geometria? **Ponto, reta e plano**
 - c) Como são chamadas as proposições que podem ser demonstradas, partindo de fatos justificáveis? **Teoremas**

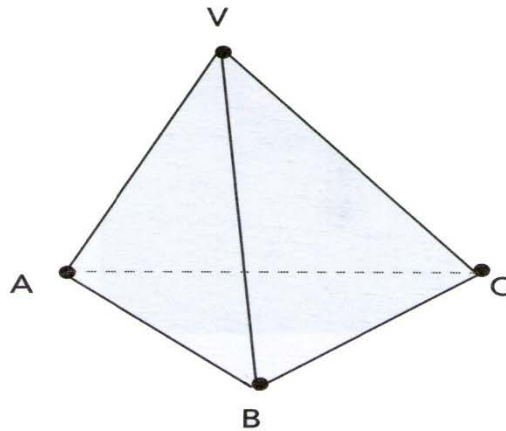


2. Quando imaginamos uma fina folha de papel ofício prolongada indefinidamente além de seus limites, no comprimento e na largura, ambos nos dois sentidos, ficando a espessura invariável, temos a ideia de:

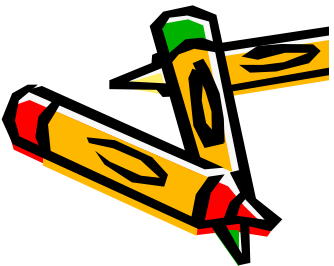
- a) reta.
- b) semirreta.
- c) plano.
- d) semiplano.
- e) espaço.



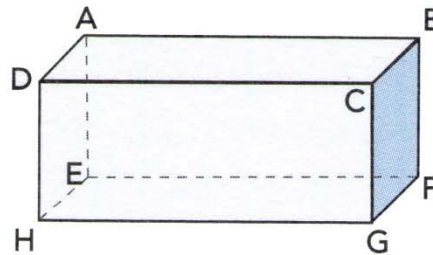
3. Em uma pirâmide, todos os vértices (“cantos”) ficam em um mesmo plano, exceto um deles. Os vértices coplanares formam a base da pirâmide e o vértice que não pertence ao plano da base é chamado de vértice da pirâmide. Imagine uma pirâmide cuja base é um triângulo ABC e cujo vértice é o ponto V.



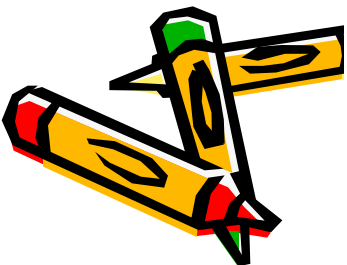
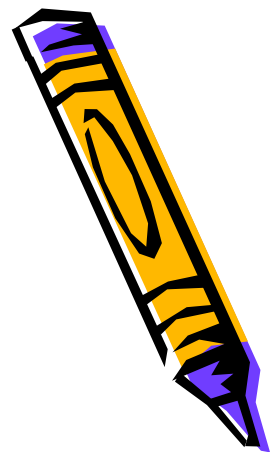
- a) Quantas retas passam pelo vértice da pirâmide? **Infinitas**
- b) Dentre as retas suportes das arestas (“quinas”) da pirâmide, quantas passam pelo vértice da pirâmide? **Três retas**
- c) Quantos planos contêm a aresta \overline{AV} ? **Infinitos**
- d) Dentre os planos determinados pelos vértices da pirâmide, está o plano da base, $PL(ABC)$. Quais são os outros planos determinados pelos vértices da pirâmide? **$PL(VBC)$, $PL(VAC)$ e $PL(VAB)$**



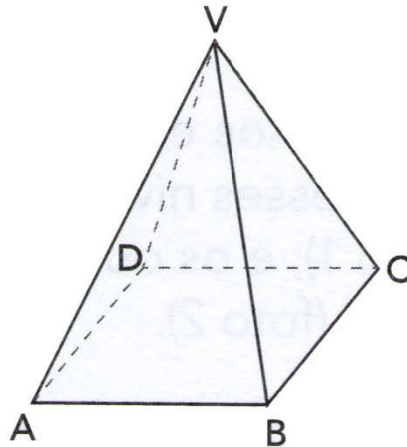
4. No paralelepípedo reto-retângulo representado a seguir, os pontos A, B, C e D são coplanares e pertencem ao plano da face ABCD. Esse plano pode ser representado por três quaisquer desses quatro vértices, em qualquer ordem: $PL(ABC) = PL(ABD) = PL(BCD) = PL(ABCD)$.



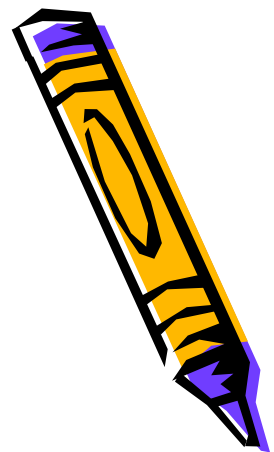
- a) Dentre os planos determinados pelos vértices ("cantos"), quais são aqueles que contêm a reta \overline{AB} e não contêm a reta \overline{EF} ? $PL(ABC)$ e $PL(ABG) \rightarrow 2$
- b) Os vértices determinam retas que contêm as arestas, retas que contêm as diagonais das faces (retângulos) e retas que contêm as diagonais do paralelepípedo (passam por dentro do sólido geométrico). Ao todo, quantas retas estão determinadas pelos vértices? $8 \times 7 / 2 = 28$



5. A base de uma pirâmide é um quadrado. Quantos planos os vértices dessa pirâmide determinam?



$$5 \text{ faces} + PL(VAC) + PL(VBD) = 7$$



FIM

