FUNÇÃO DO 2.º GRAU

PROFESSOR: JARBAS

Função do 2.º grau

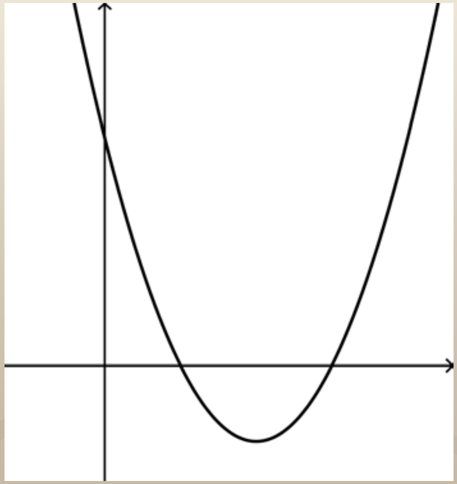
Chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2.º grau**, qualquer função *f* de R em R dada por uma lei da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

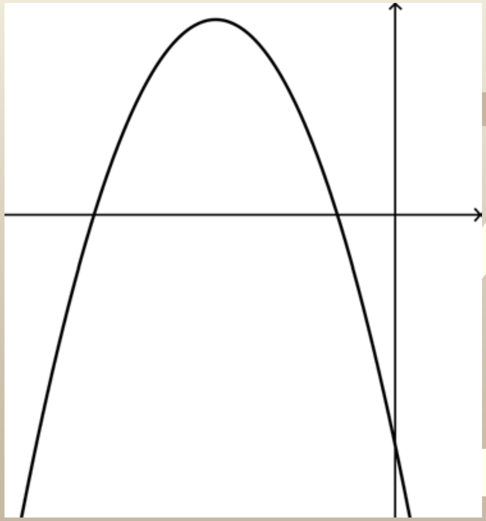
onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

O gráfico de uma função do 2.º grau é uma curva chamada **parábola**.

Tipos de parábolas:



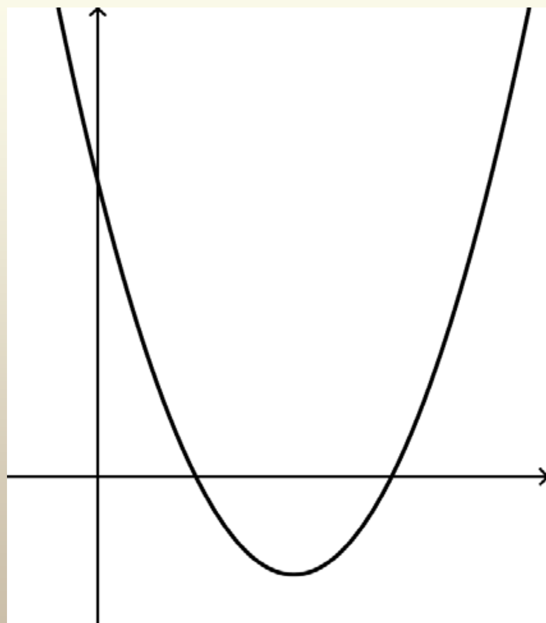
Concavidade para cima



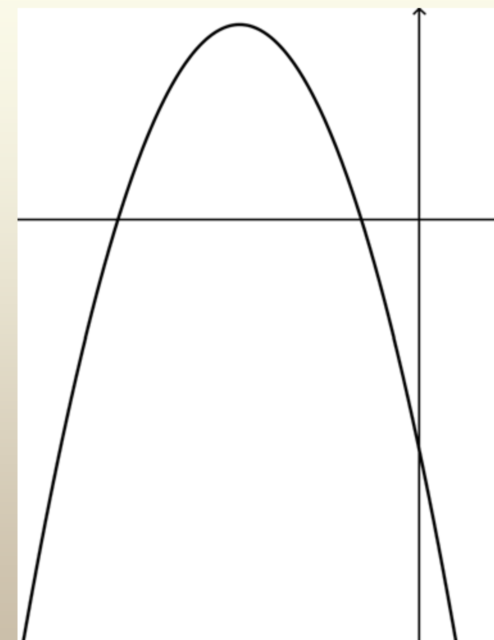
Concavidade para baixo

Estudo da concavidade da parábola

Quando **a > 0**, a concavidade da parábola é voltada para **cima**.



Quando **a < 0**, a concavidade da parábola é voltada para **baixo**.



Raízes (zeros) da função do 2.º grau

Para determinar as raízes (ou zeros) da função do 2º grau **$f(x) = ax^2 + bx + c$**, basta calcular os valores de **x** que tem imagem igual a **zero.**

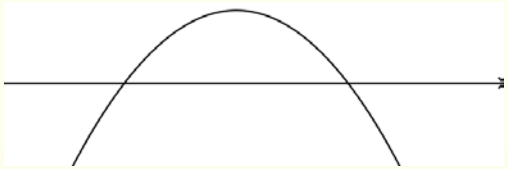
Ou seja, devemos resolver a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

E, para isso, usamos a **fórmula de báskara.**

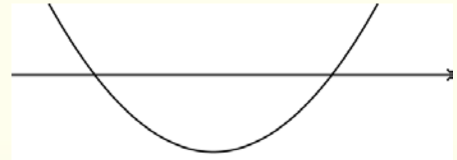
$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Podemos estabelecer uma relação entre o discriminante Δ e a intersecção da parábola com o eixo x.

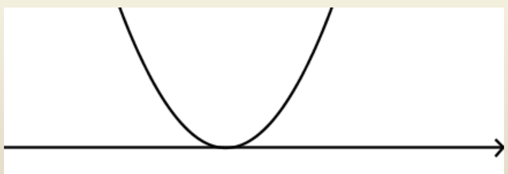
- Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais e a parábola intercepta o eixo x em dois pontos.



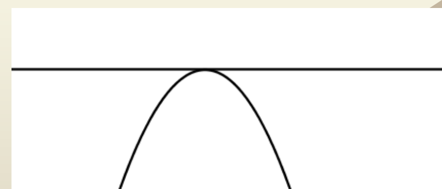
ou



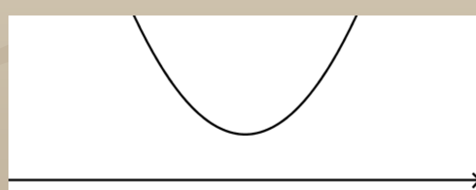
- Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais e a parábola intercepta o eixo x em um único ponto.



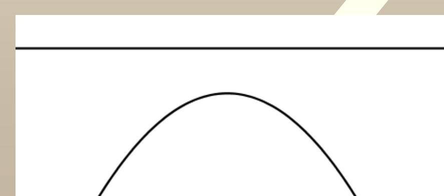
ou



- Se $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais e a parábola não intercepta o eixo x.

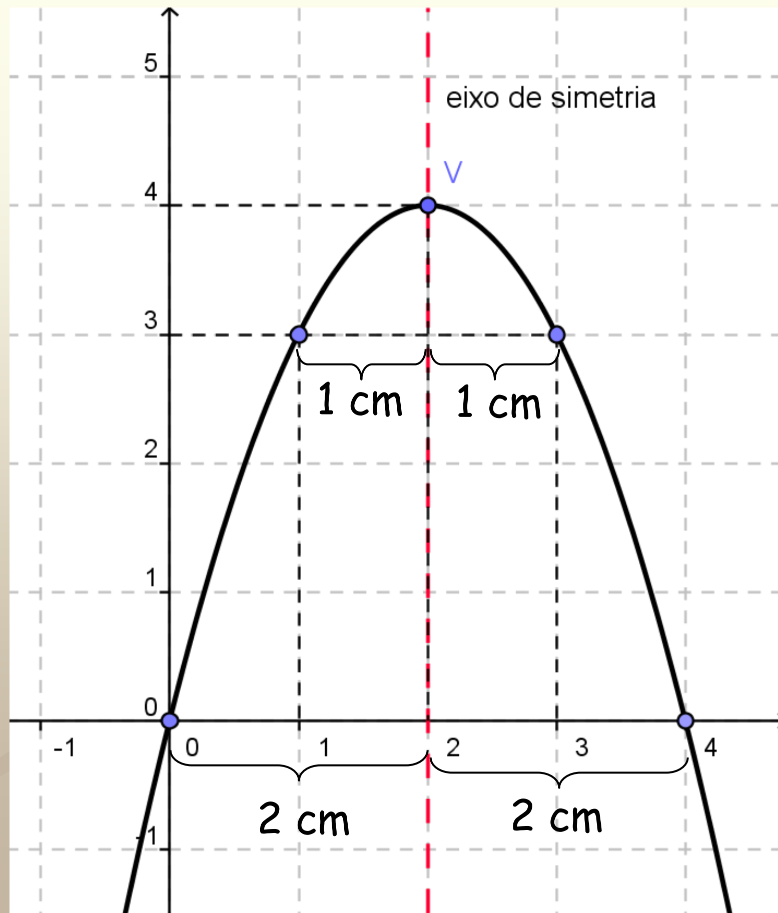


ou



Vértice da parábola

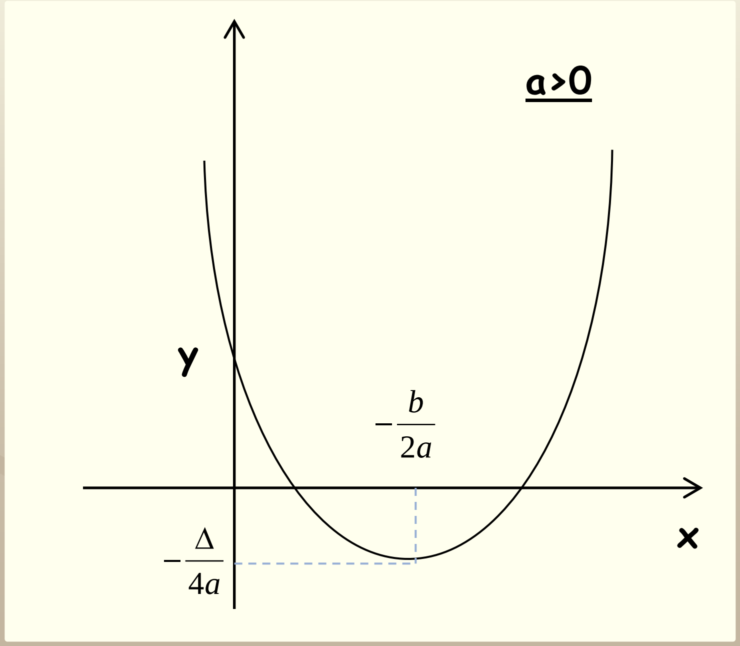
O **vértice V (x_v, y_v)** é um ponto fundamental da parábola, o único ponto pertencente ao eixo de simetria.

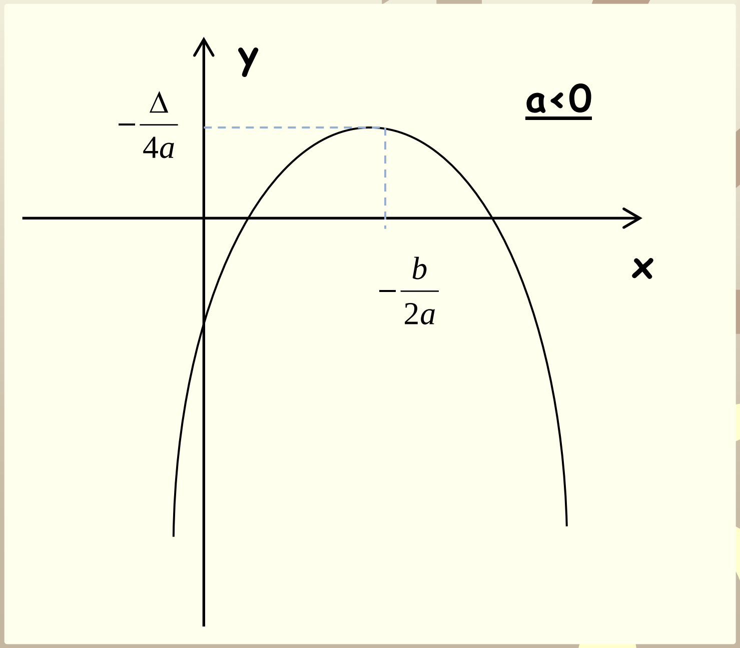


Coordenadas do vértice da parábola

Quando a > 0, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo V; quando a < 0, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V.

Em qualquer caso, as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ **. Veja os gráficos:**





Outra maneira de obter o **vértice V (x_v, y_v)** de uma parábola da equação **$f(x) = ax^2 + bx + c$**, é:

- Calculamos a média aritmética das raízes x′ e x″, para obtermos a abscissa (**x_v**) desse vértice.

$$x_v = \frac{x' + x''}{2}$$

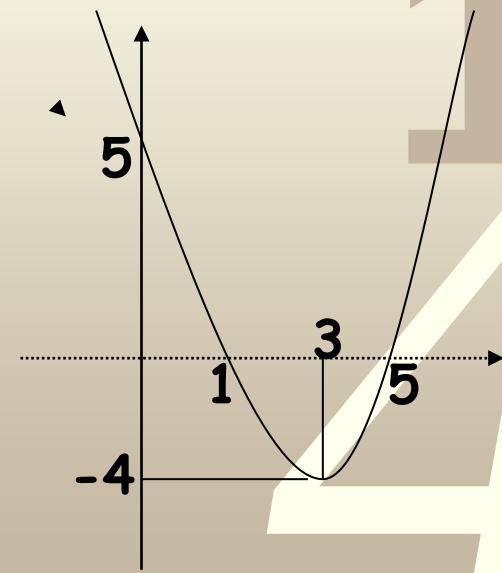
- Em seguida, substituímos **x_v**, na função e encontramos a ordenada do vértice **y_v**.

Exemplo:

O vértice da parábola de equação $y = x^2 - 6x + 5$ **é dado por V**(X_V, Y_V)**, em que:**

$$x_v = -\frac{b}{2a} - \frac{(-6)}{2.1} = 3 \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} - \frac{(-6)^2 - 4.1.5}{4.1} = -4$$

Portanto, o vértice da parábola é o ponto v(3, -4).



Nas questões em que é pedido ou se faz referência ao valor máximo ou mínimo de uma função do 2º grau, temos que descobrir “O que a questão está pedindo é Xv ou Yv?” O valor de Yv = -Δ/4a, é o próprio valor máximo, se a<0, ou mínimo da função, se a>0. Já o valor de Xv = -b/2a, é o que torna o valor de Yv máximo ou mínimo.

Exemplos:

1. U*ma bola é atirada para cima, com velocidade inicial de 40 m/s, do alto de um edifício de 100m de altura. A altura (h) atingida pela bola em relação ao solo, em função do tempo (t) é dada pela expressão:*

$h(t) = -5t^2 + 40t + 100$ ***.Qual a altura máxima alcançada pela bola?***

2. O custo C, em reais, para se produzir n unidades de determinado produto é dado por: $C = n^2 - 100n + 2510$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo ?

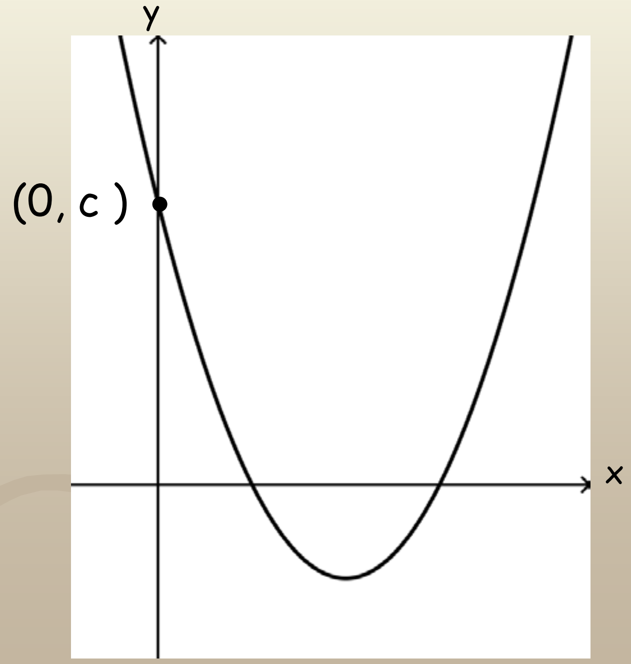
Outro ponto importante da parábola é o ponto de intersecção da função com o eixo y.

Para determiná-lo, basta substituir **x = 0** na função

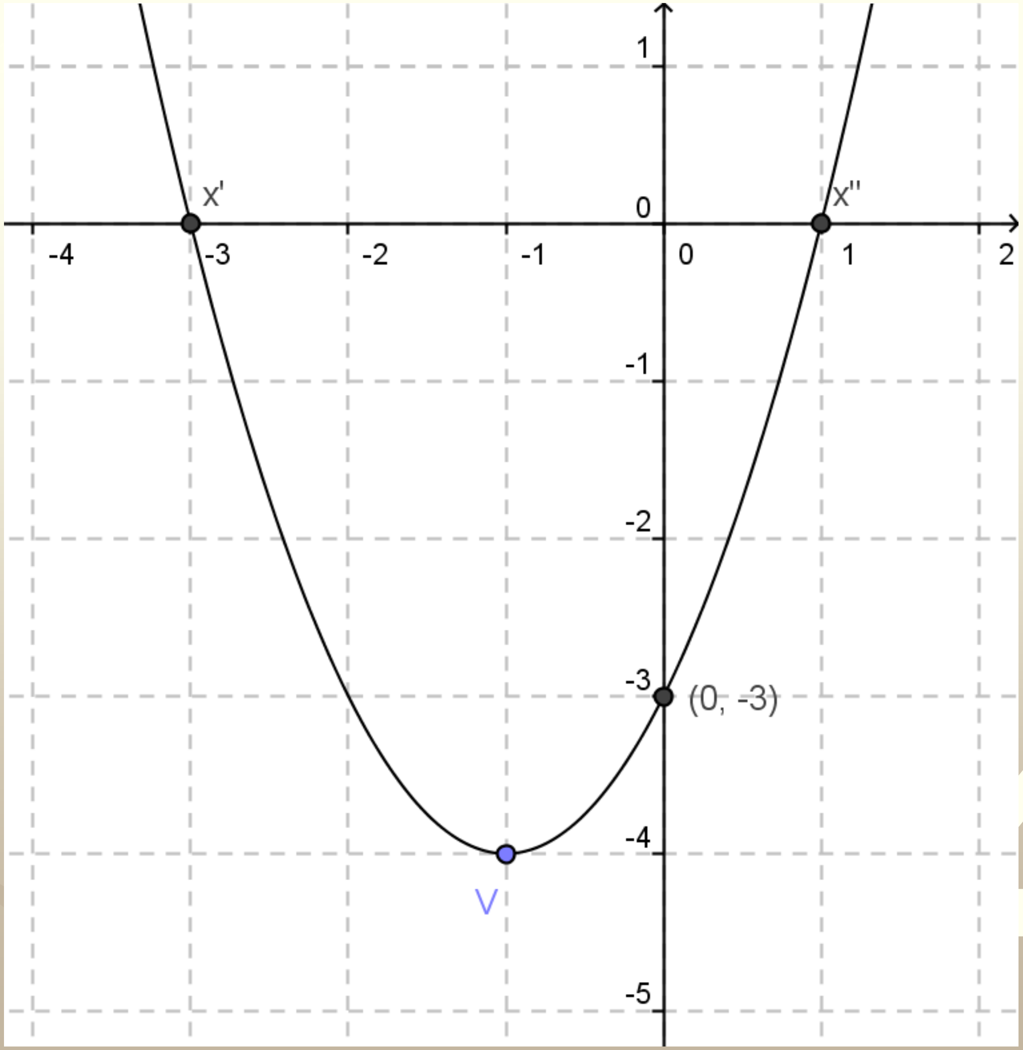
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = a.0^2 + b.0 + c$$

$$f(0) = c$$



Esboço do gráfico da função do 2.º grau

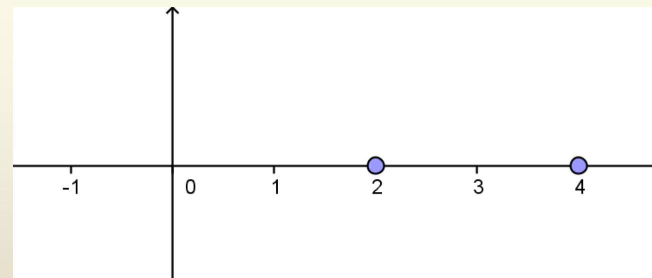


Construção do gráfico da função do 2.° grau

Construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, com x e y $\in$ R.

1° passo: determinar as raízes da função

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$$

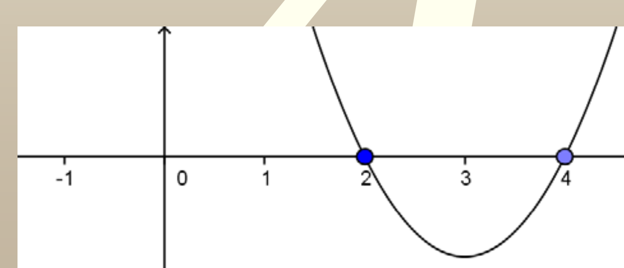


$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 = 36 - 32$$
$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.1} \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

2° passo: estudo da concavidade

$a = +1 \rightarrow$ concavidade para cima



3º passo: determinar o vértice da parábola

$$V_x = \frac{x' + x''}{2}$$

$$V_x = \frac{4+2}{2} = 3$$

$V_y = 3^2 - 6 . 3 + 8$

$V_y = 9 - 18 + 8$

$V_y = -1$

$V = (3, -1)$

4º passo: ponto de intersecção da função com o eixo **y** **(quando x=0)**

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

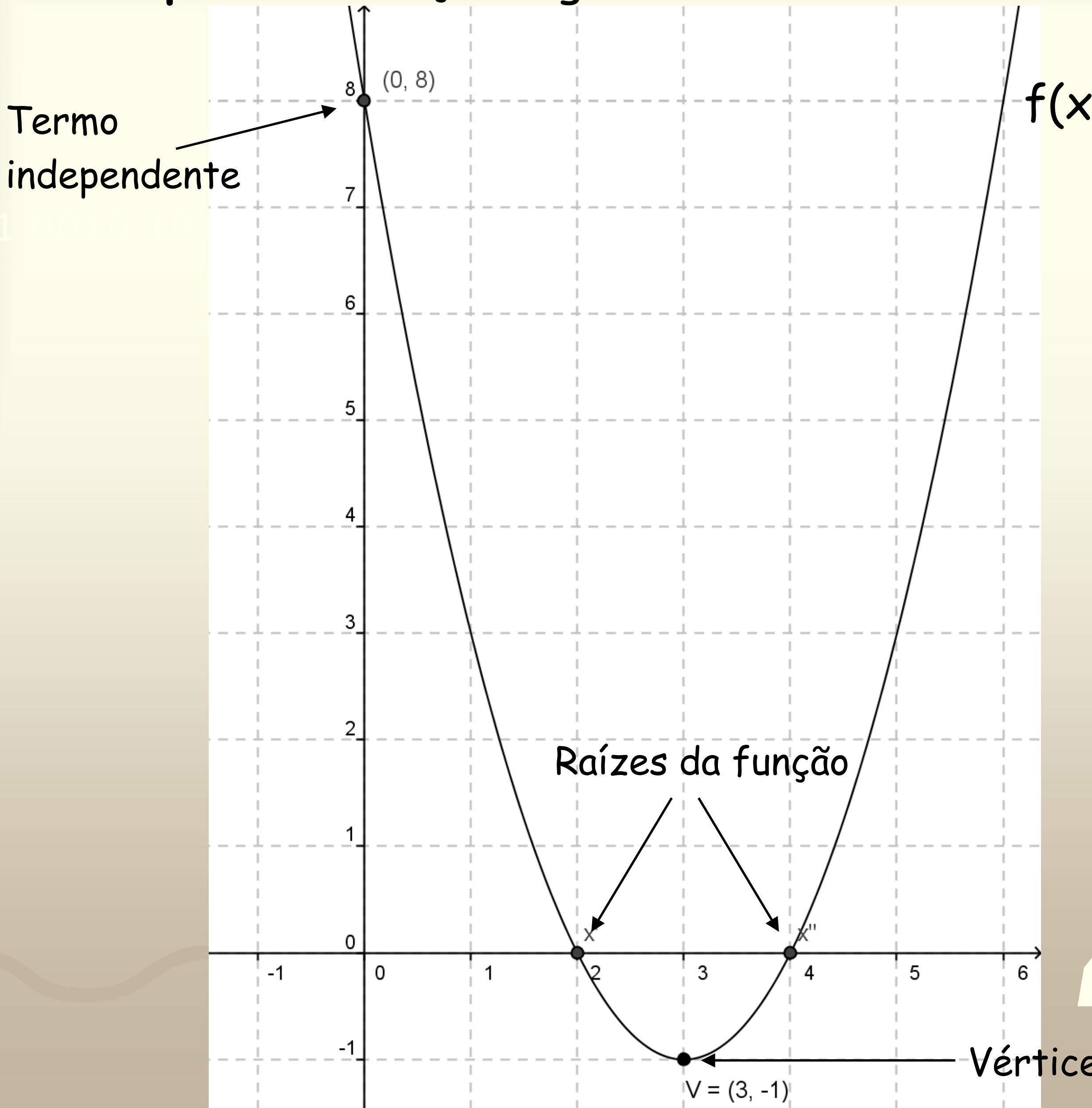
$f(0) = 0^2 - 6.0 + 8$

$f(0) = 8$

Temos então o ponto (0,8)

5º passo: esboço do gráfico

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$



Construção do gráfico da função do 2.° grau
Passo a passo

1° passo: determinar as raízes da função

2° passo: estudo da concavidade

3° passo: determinar o vértice da parábola

4° passo: ponto de intersecção da função com o eixo **y** **(quando x=0)**

5° passo: esboço do gráfico

Imagem

O conjunto imagem Im da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, a $\neq$ 0 é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

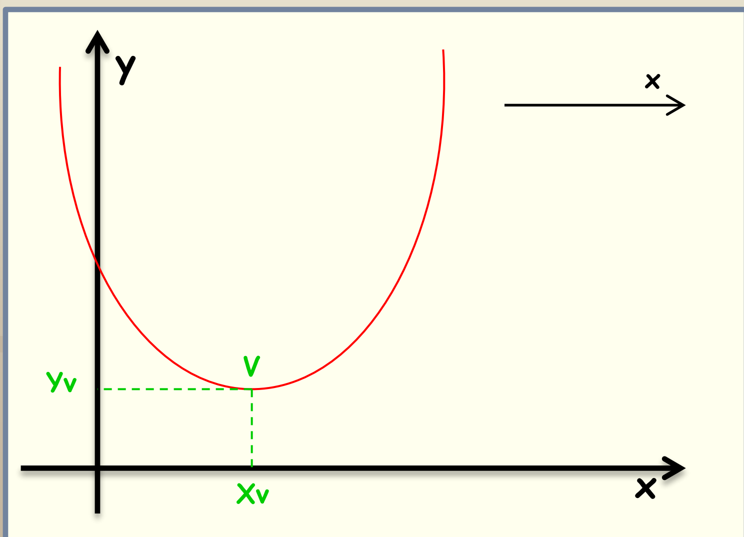
1ª - quando a > 0, **2ª quando a < 0,**

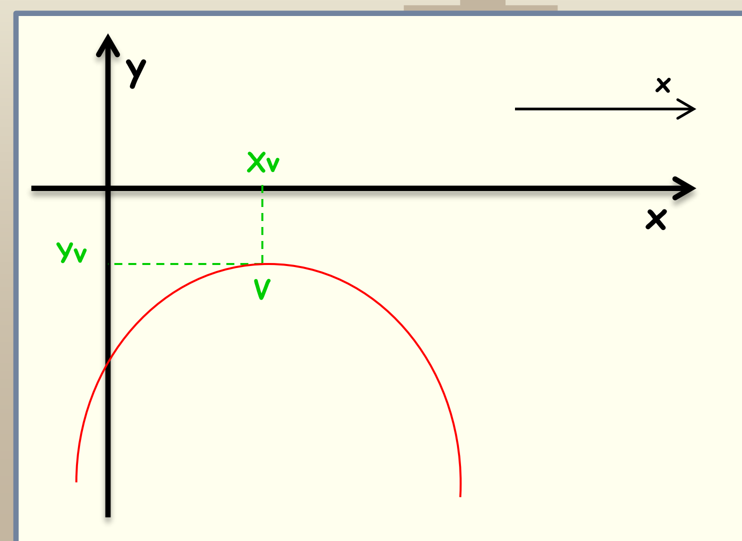
$$\mathbf{Im} = \{\gamma \in R \mid \gamma \geq \gamma v = -\frac{\Delta}{4a}\}$$

a > 0

$$\mathbf{Im} = \{\gamma \in R \mid \gamma \leq \gamma v = -\frac{\Delta}{4a}\}$$

a < 0





Exercícios:

1) Encontre a imagem das funções abaixo:

a) $Y = X^2 - 7x + 12$

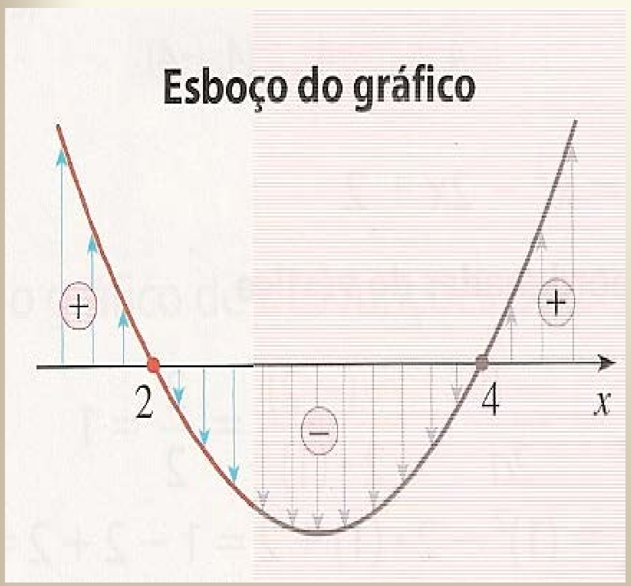
b) $Y = -X^2 + 5x - 4$

4.8 Conclusões:

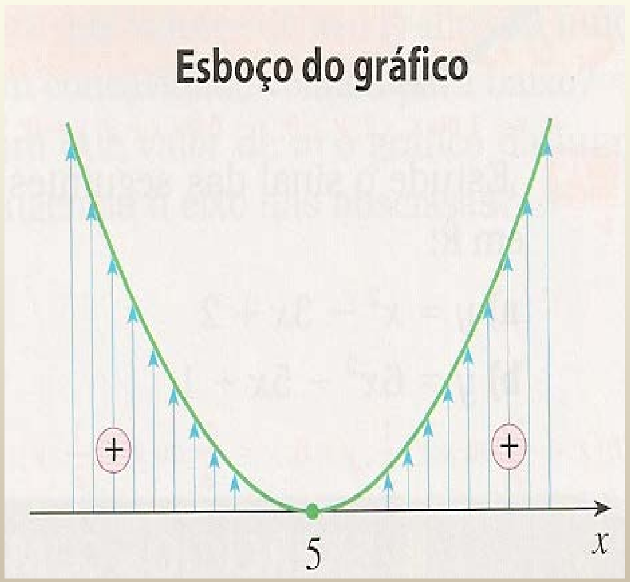
- **Observamos que o gráfico de uma função do 2º grau é sempre uma parábola.**
- **Quando $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima, $a < 0$ a parábola tem concavidade voltada para baixo.**
- **O coeficiente c é a ordenada do ponto $(0,c)$ onde a parábola intercepta o eixo y.**
- **O zeros ou raízes da função são o pontos onde a parábola intercepta o eixo x, ou seja, onde $f(x) = 0$.**

Estudo do Sinal da função do 2º grau

Para a > 0



$\Delta > 0$

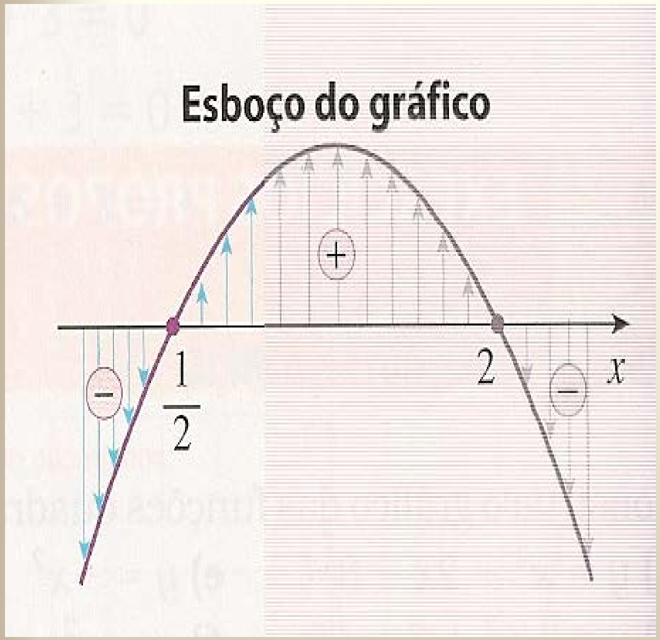


$\Delta = 0$

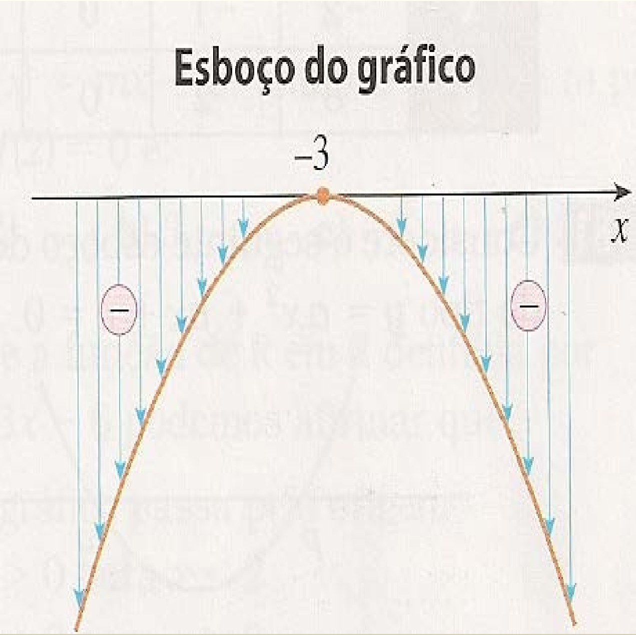
$\Delta < 0$

Estudo do Sinal da função do 2º grau

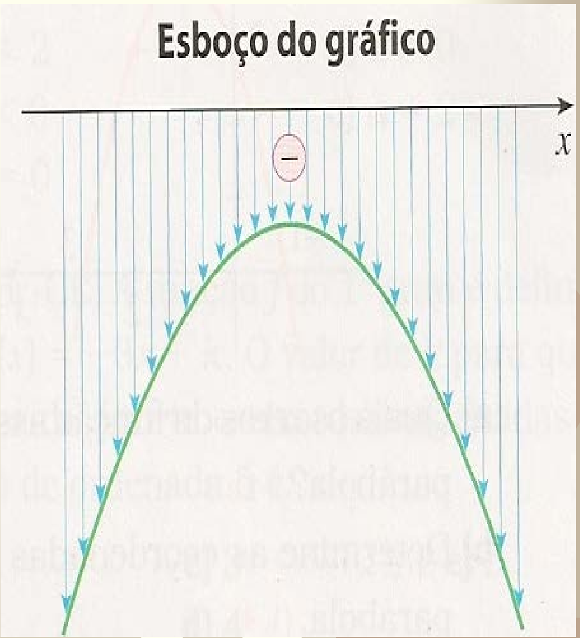
Para a < 0



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$

Exemplo:

1) Estude o sinal das funções abaixo.

a) $Y = -x^2 + 6x - 8$

a) $Y = x^2 - 4x + 4$

2) Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$, para quais valores de x tem-se $f(x) \geq 0$?