FUNÇÕES

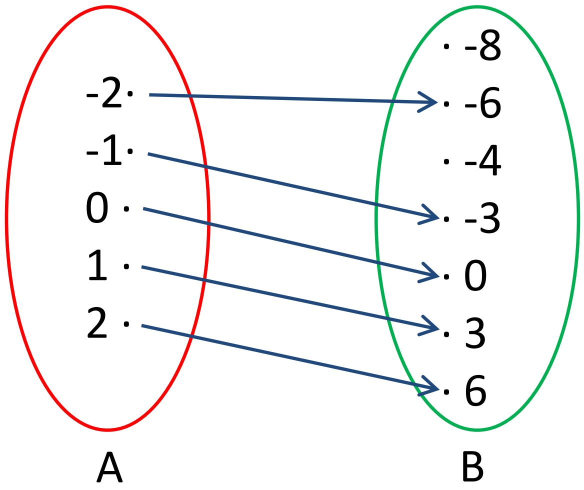
PROFESSOR: JARBAS

Aplicação do conceito

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar em destaque em vários de seus ramos, bem como em outras áreas do conhecimento. É muito comum e conveniente expressar fenômenos físicos, biológicos, sociais, etc. por meio de funções.

A noção de função por meio de conjuntos

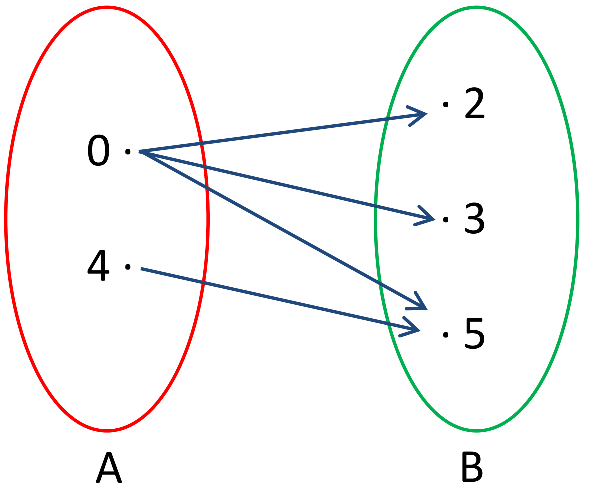
1) Observe os conjuntos A e B relacionados da seguinte forma: em A estão os números inteiros e em B, outros.
Devemos associar cada elemento de A ao seu triplo em B



Note que:
- todos os elementos de A têm correspondente em B;
- a cada elemento de A corresponde um único elemento de B.

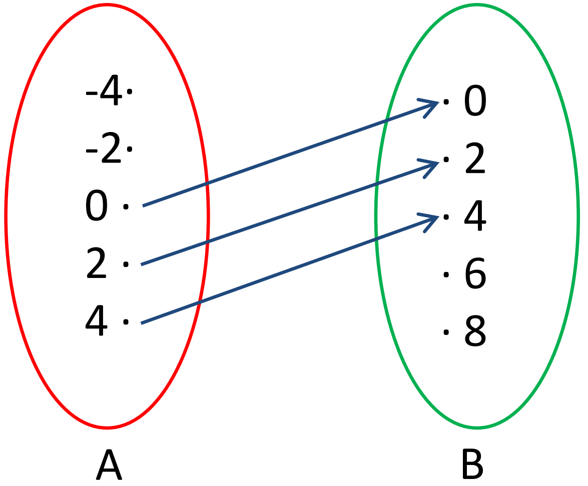
Nesse caso, **temos uma função** de A em B, expressa pela fórmula y = 3x.

2) Dados A = {0, 4} e B = {2, 3, 5}, relacionamos A e B da seguinte forma: cada elemento de A é menor do que um elemento de B:



Nesse caso, **não temos uma função** de A em B, pois ao elemento 0 de A correspondem três elementos de B, e não apenas um único elemento de B.

3) Dados A = {- 4, - 2, 0, 2, 4} e B = {0, 2, 4, 6, 8}, associamos os elementos de A aos elementos de igual valor em B.

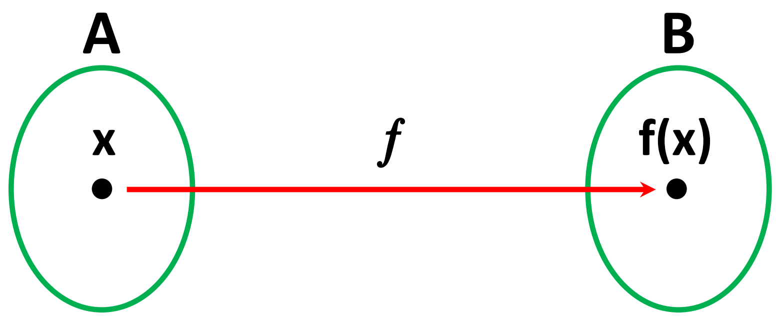


Observe que há elementos em A que não têm correspondente em B. Nesse caso, **não temos uma função** de A em B.

Definição e notação

Dados dois conjuntos não vazios, **A** e **B**, uma função de **A** em **B** é uma relação que indica como associar cada elemento x do conjunto A a um único elemento y do conjunto B.

Usamos a seguinte notação:



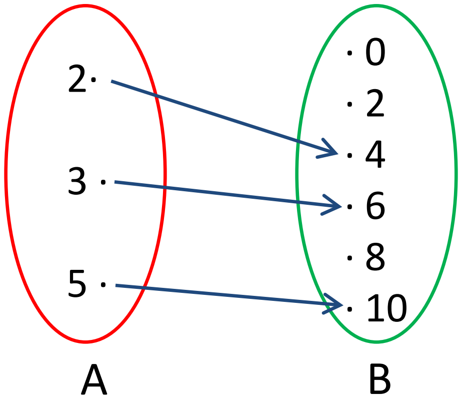
f: A → B

"A cada x de A corresponde um único f(x) de B, levado pela função f."

Domínio, contradomínio e conjunto imagem

O diagrama de flechas a seguir representa uma função **f** de **A** em **B.**

Vamos determinar:



a) D(f)

D(f) = {2, 3, 5} ou D(f) = A

b) CD(f)

CD(f) = {0, 2, 4, 6, 8, 10} ou CD(f) = B

c) Im (f)

Im(f) = {4, 6, 10}

d) f(3)

f(3) = 6

e) f(5)

f(5) = 10

f) x para f(x) = 4

x = 2

Função e gráfico

Coordenadas cartesianas

A forma de localizar pontos no plano foi imaginada por René Descartes (1596-1650), no século XVII. O sistema cartesiano é formado por duas retas perpendiculares entre si e que se cruzam no ponto zero. Esse ponto é denominado **origem** do sistema cartesiano e é frequentemente denotado por *O*. Cada reta representa um eixo e são nomeados *Ox* e *Oy*. Sobrepondo um sistema cartesiano e um plano, obtém-se o um **plano cartesiano**, cuja principal vantagem é associar a cada ponto do plano um par de números reais. Assim, um ponto A do plano corresponde a um par ordenado (*m, n*) com *m* e *n* reais.

O eixo horizontal *Ox* é chamado de **eixo das abscissas** e o eixo vertical *Oy*, de **eixo das ordenadas**. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes.**

Imagem: Frans Hals / *Portrait of René Descartes, c.* 1649-1700 / *Louvre Museum, Richelieu, 2nd floord, room 27 Paris / Public Domain.*

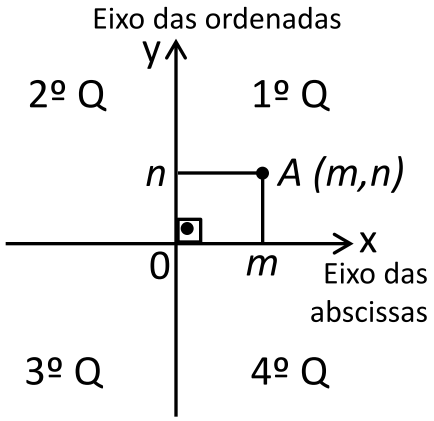
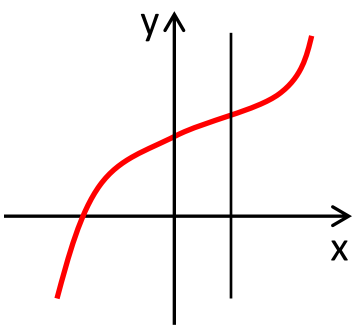


Gráfico de função

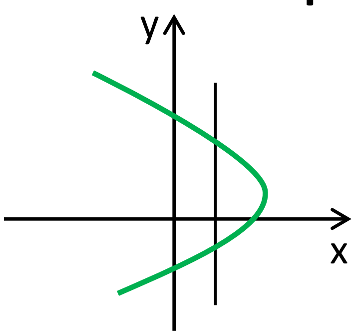
O gráfico de uma função é o conjunto de pares ordenados *(x, y)* que tenham *x* pertencente ao domínio da função f e $y = f(x)$.

Reconhecimento do gráfico de uma função

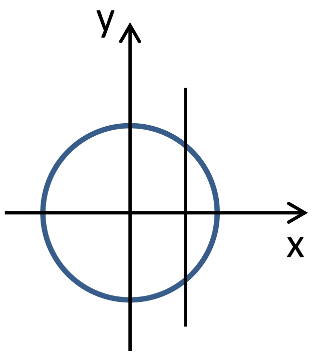
Para saber se um gráfico representa uma função é preciso verificar se cada elemento do domínio existe apenas um único correspondente no contradomínio. Geometricamente significa que qualquer reta perpendicular ao eixo *Ox* deve interceptar o gráfico **em um único ponto**.



Qualquer reta perpendicular ao eixo Ox intercepta o gráfico em um único ponto; portanto, o gráfico representa uma função de x em y.

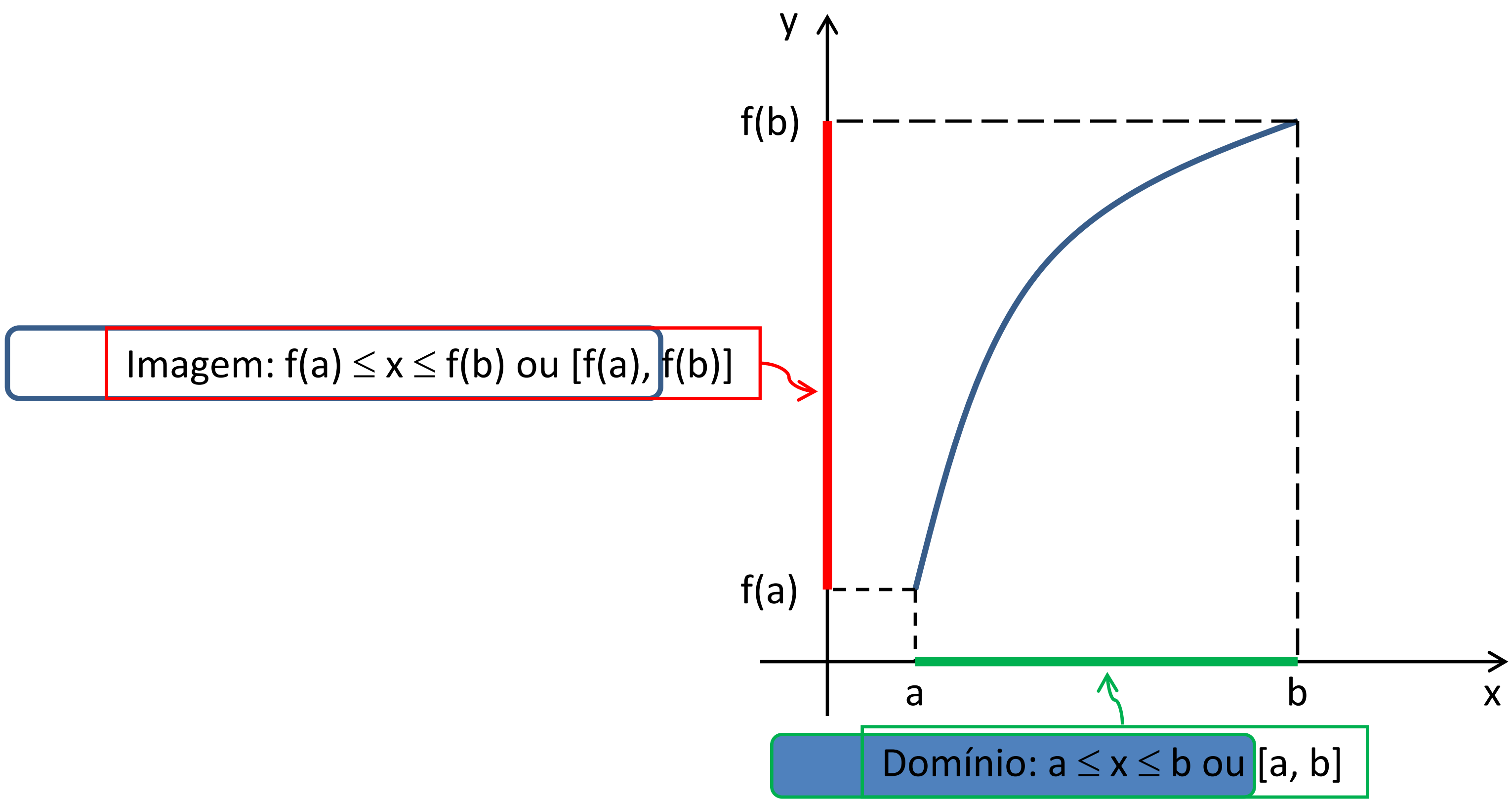


Existem retas perpendiculares ao eixo Ox que interceptam o gráfico em mais de um ponto; portanto, o gráfico não representa uma função de x em y.



Existem retas perpendiculares ao eixo Ox que interceptam o gráfico em mais de um ponto; portanto, o gráfico não representa uma função de x em y.

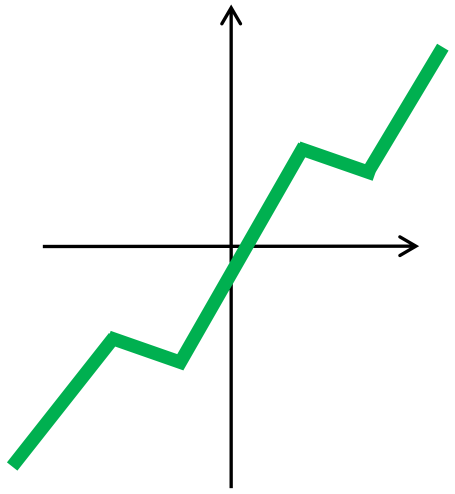
Domínio e imagem a partir do gráfico

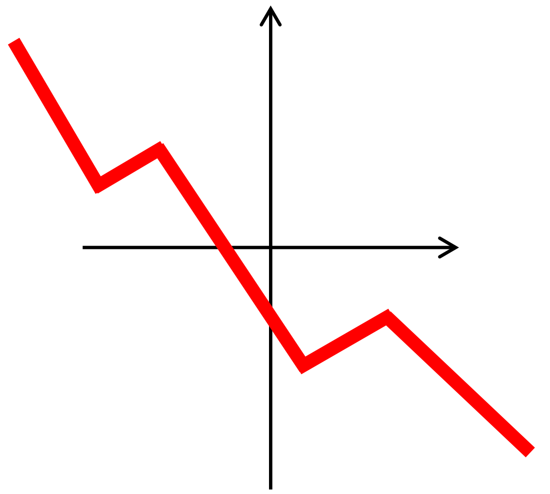


Função crescente e decrescente

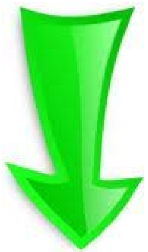
Todos os dias nos deparamos com notícias do tipo:

- Número de católicos no Brasil diminuem, enquanto o número de evangélicos aumentam;
- Dólar fecha em queda após quatro altas seguidas;
- Mercado prevê mais inflação, queda maior do PIB e nova alta dos juros;
- Com mercado de carros novos em queda, cresce a venda de veículos novos;
- Previsão de inflação para 2015 continua subindo;
- Agência aprova novas taxas, e conta de luz vai subir em todo o país.





Função crescente



quando o valor de y aumentar conforme o de x aumentar, temos uma função crescente.

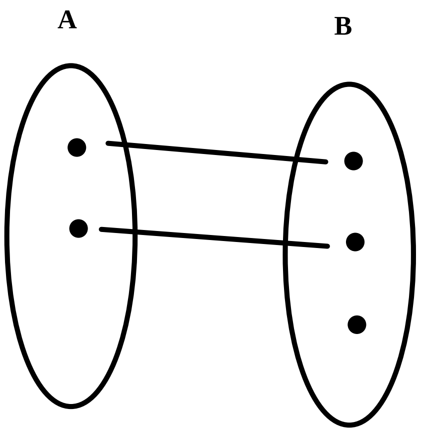
Função decrescente

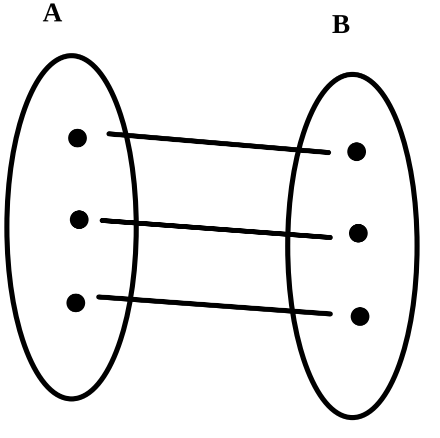
quando o valor de y diminuir conforme o de x aumentar, temos uma função decrescente.

FUNÇÃO INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

FUNÇÃO INJETORA:

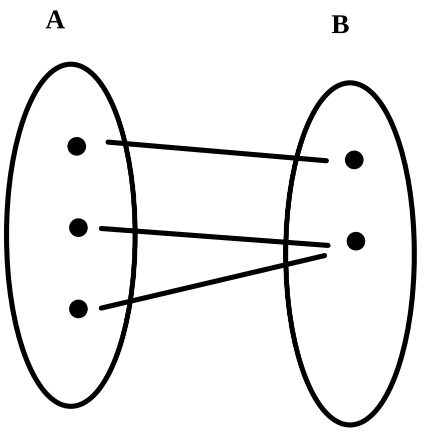
Dizemos que uma função é injetora se cada imagem possui, no máximo, um domínio.

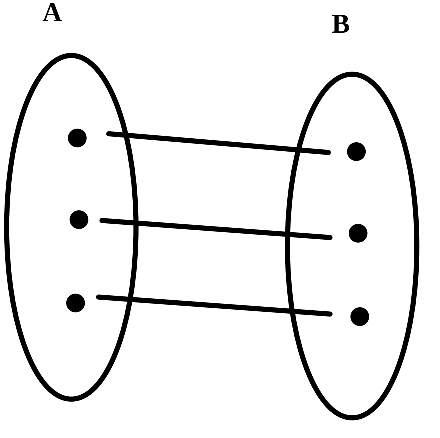




FUNÇÃO SOBREJETORA:

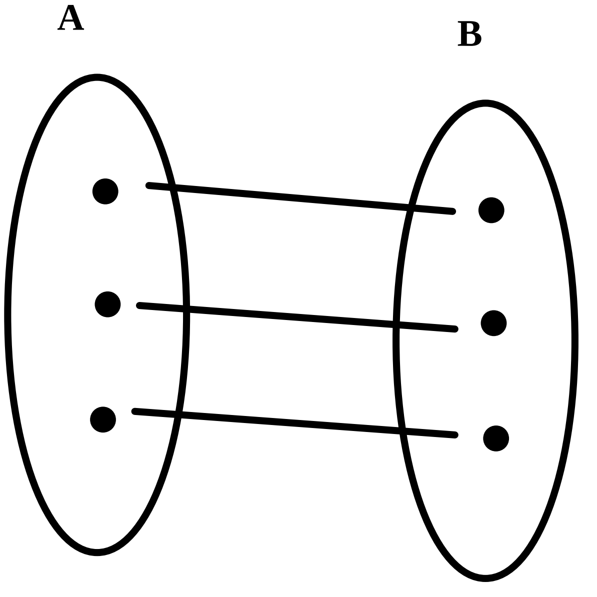
Dizemos que uma função é sobrejetora se a sua imagem é igual ao contradomínio

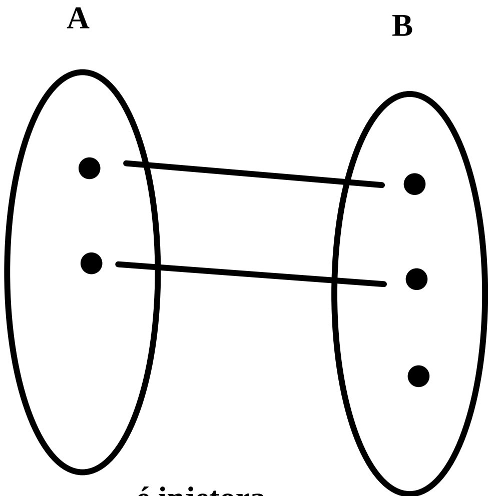




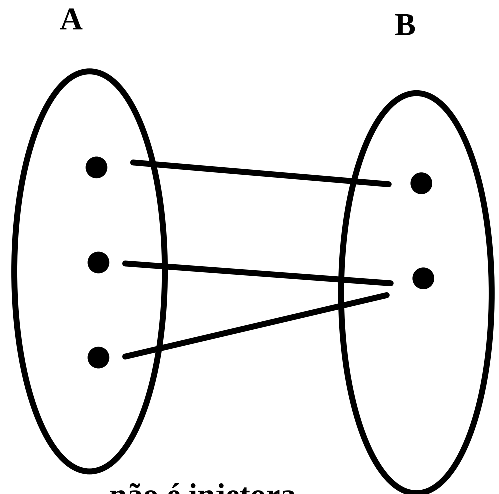
FUNÇÃO BIJETORA:

Dizemos que uma função é bijetora se ela é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.



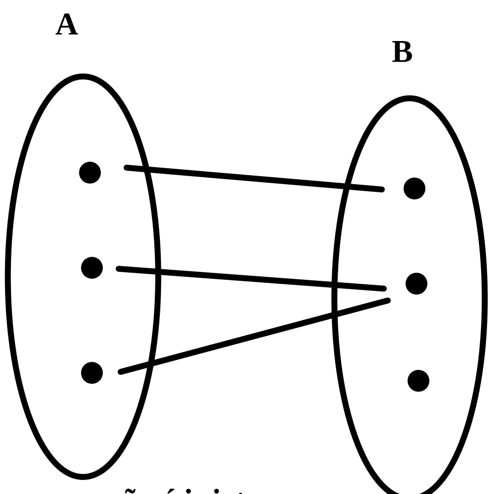


é injetora
naõ é sobrejetora



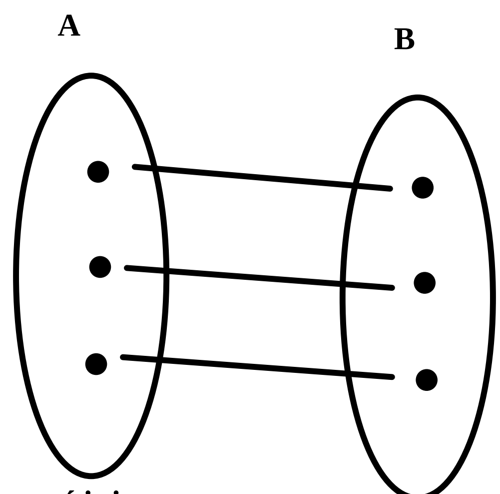
não é injetora

é sobrejetora



não é injetora

não é sobrejetora



é injetora

é sobrejetora

bijetora

Pensando no ENEM...

(ENEM) O dono de uma farmácia resolveu colocar a vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.

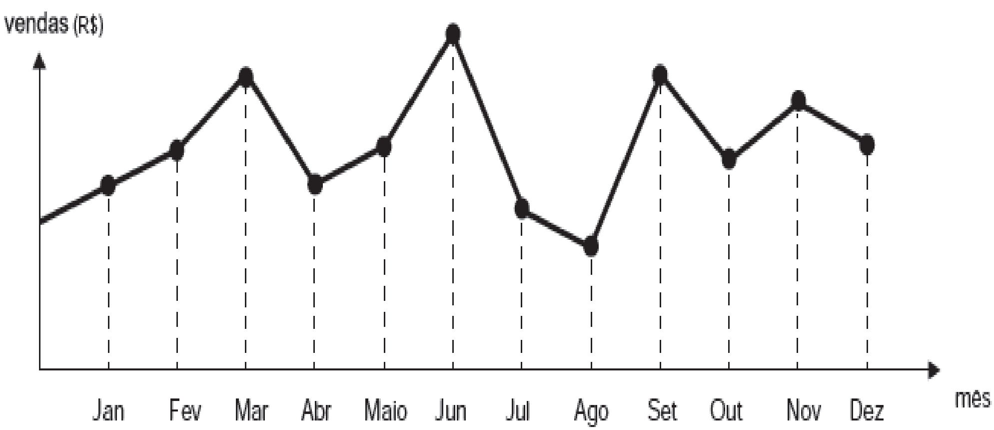


Imagem: INEP-MEC

De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absoluta em 2011 foram

a) março e abril.
b) março e agosto.
c) agosto e setembro.
d) junho e setembro.
e) junho e agosto.

De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram junho e agosto. Portanto item E.

Agora analise os intervalos onde aconteceram crescimento (aumento) ou decrescimento (queda) das vendas do medicamento em questão.

EXEMPLOS:

1) A função y = f(x) é crescente para $1 \leq x < 3$, decrescente para $3 \leq x < 4$ e é constante para $x \geq 4$. O gráfico que mais adequadamente representa a função y = f(x) é

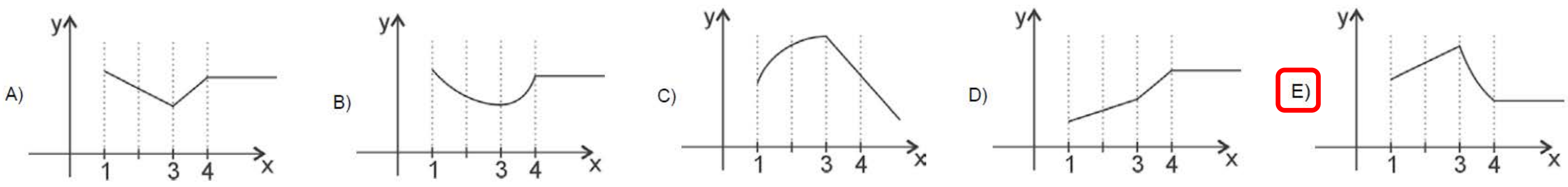


Imagem: SEE-PE

2) Observe abaixo o gráfico de uma função real definida no intervalo [–5, 6].

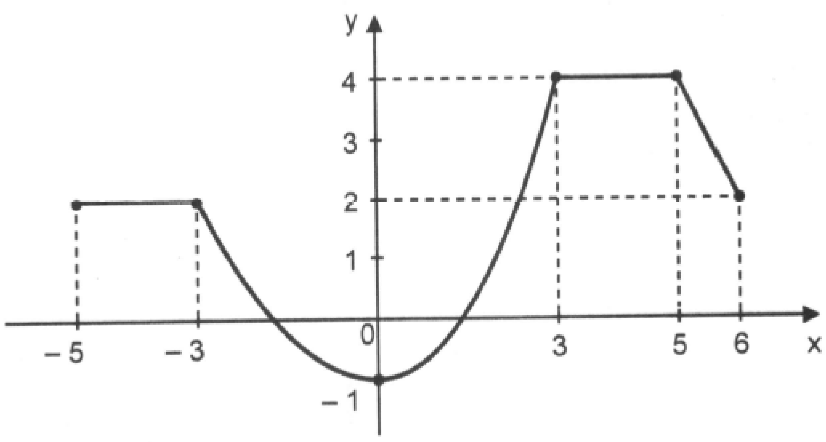


Imagem: SEE-PE

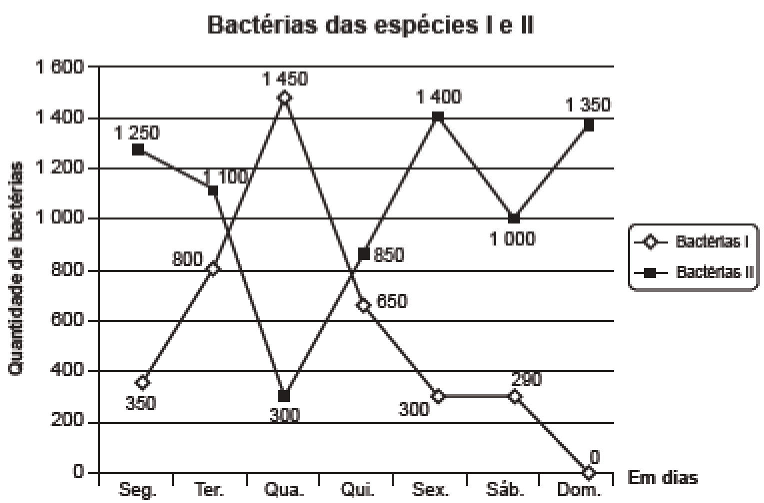
Essa função é decrescente em

a) [– 5, – 3] U [3, 5]
b) [– 3, 0] U [0, 3]
c) [– 3, – 1] U [4, 6]
d) [– 3, 0] U [5, 6]
e) [– 1, 2] U [2, 4]

Aplicação de função na Biologia...

3) (ENEM) Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

Imagem: INEP - MEC



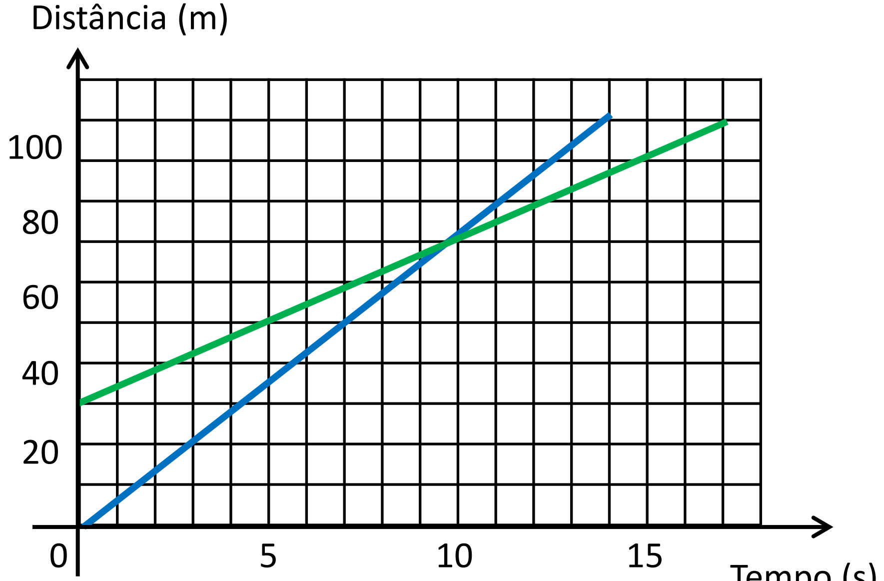
Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

a) Terça-feira.
b) Quarta-feira.
c) Quinta-feira.
d) Sexta-feira.
e) Domingo.

A quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima na terça feira, num total de 800 + 1100 = 1900, pois nos demais dias, temos: Segunda: 350 + 1250 = 1600; Quarta: 300 + 1450 = 1750; Quinta = 850 + 650 = 1500; Sexta: 300 + 1400 = 1700; Sábado: 290 + 100 = 1290 e Domingo: 0 + 1350 = 1350. Portanto a resposta é o item A.

Aplicação de função na Física...

4)Um rapaz desafia seu pai para uma corrida de 100 m. O pai permite que o filho comece 30 m à sua frente. Um gráfico bastante simplificado dessa corrida é dado a seguir:



a) Pelo gráfico, como é possível dizer quem ganhou a corrida e qual foi a diferença de tempo?

O pai ganhou a corrida, pois ele chegou aos 100 m em 14 s e o filho, em 17 s; a diferença de tempo foi de 3 s.

b) A que distância do início o pai alcançou seu filho?

Cerca de 70 m.

c) Em que momento depois do início da corrida ocorreu a ultrapassagem?

Cerca de 10 s.